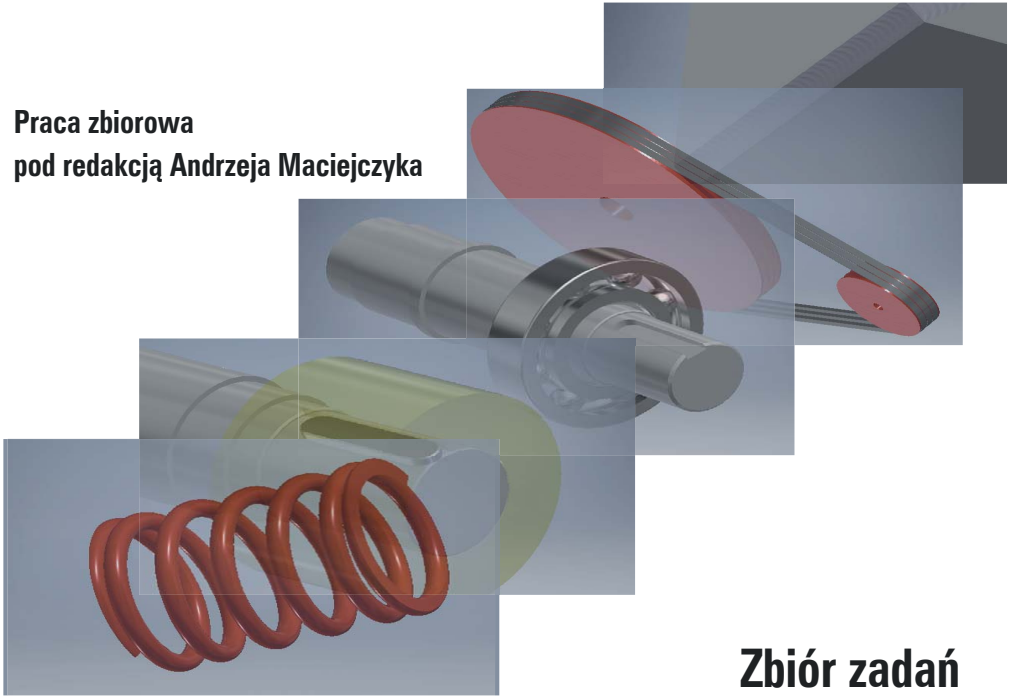




**Politechnika Łódzka**

**Katedra Pojazdów i Podstaw Budowy Maszyn**

**Praca zbiorowa  
pod redakcją Andrzeja Maciejczyka**



**Zbiór zadań**

# **PODSTAWY KONSTRUKCJI MASZYN**

**Autorzy: Arkadiusz Kądziela, Przemysław Kubiak, Maciej Kuchar,  
Andrzej Maciejczyk, Andrzej Michalak, Grzegorz Mitukiewicz,  
Marek Woźniak, Sergiusz Zakrzewski**

Recenzent  
dr hab. inż. Zdzisław Kondrat

Projekt okładki: Agata Niewiadomska

Opracowanie redakcyjne: Dorota Utracka

Skład i łamanie: Agata Niewiadomska

© Copyright by Politechnika Łódzka, Łódź 2020

ISBN 978-83-66287-53-2

Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej  
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223  
Tel. 42-631-20-87, 42-631-29-52  
E-mail: [zamowienia@info.p.lodz.pl](mailto:zamowienia@info.p.lodz.pl)  
[www.wydawnictwo.p.lodz.pl](http://www.wydawnictwo.p.lodz.pl)

Podręczniki i Skrypty Politechniki Łódzkiej, Nr. 2324

Nakład 100. egz., 10,5 arkuszy drukarskich  
Druk i oprawa: Drukarnia Quick-Druk,  
90-562 Łódź, ul. Łąkowa 11

# Spis treści

## Nr strony

Wstęp.....	5
1. Sprężyny .....	7
1.1. Sprężyny walcowe naciskowe z drutu okrągłego .....	8
2. Połączenia gwintowe (śrubowe).....	25
3. Połączenia spawane .....	43
3.1. Spoiny czołowe .....	44
3.2. Spoiny pachwinowe .....	44
4. Połączenia skurczowe i wciskowe (cierne).....	57
5. Połączenia kształtowe .....	75
6. Wały.....	81
7. Łożyska toczne .....	101
8. Przekładnie z pasami klinowymi .....	113
9. Przekładnie zębate .....	129
9.1. Korekcja zazębienia.....	130
9.2. Przekładnie zębate o zębach skośnych.....	147
Literatura.....	161
Wykaz norm.....	162
Wykaz rysunków.....	164
Wykaz tabel .....	167



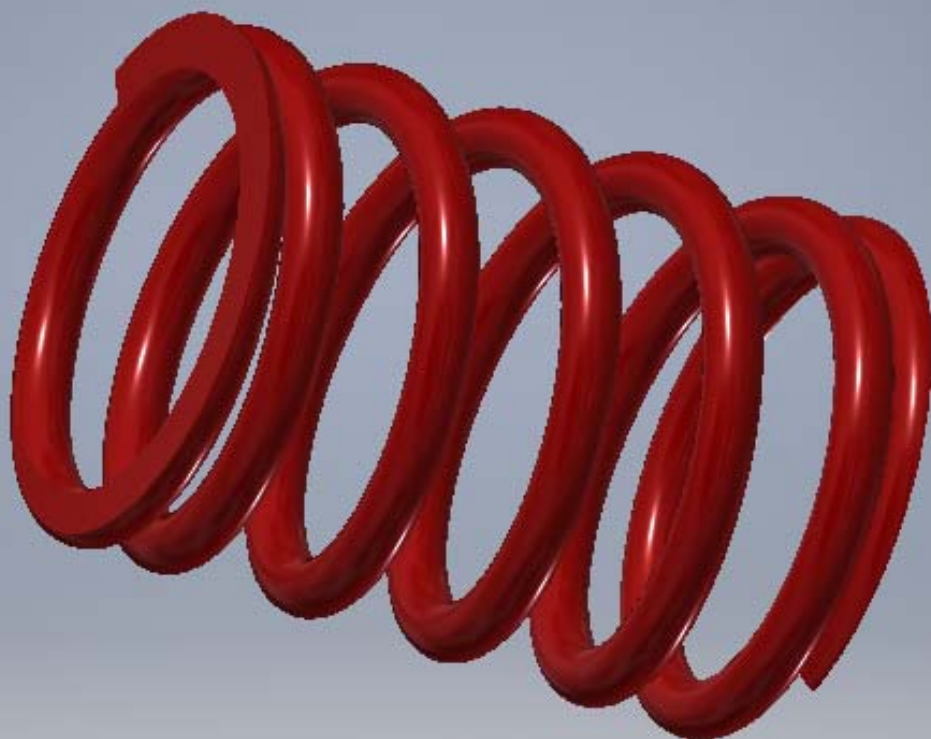
## **Wstęp**

Zbiór zadań jest przeznaczony dla studentów Wydziału Mechanicznego dowolnego kierunku. Ma służyć pomocą podczas zajęć laboratoryjnych. Zawarto w nim metodykę postępowania w trakcie rozwiązywania typowych zadań konstrukcyjnych uzupełnioną teoretycznym wprowadzeniem. Obok przykładowych rozwiązań przedstawiono szereg tematów do samodzielnego opracowania. W zbiorze zadań uwzględniono zakres tematyczny zgodny z programem nauczania przedmiotu Podstawy konstrukcji Maszyn w Politechnice Łódzkiej.

Niniejsza publikacja powstała wysiłkiem zespołu pracowników Katedry Pojazdów i Podstaw Budowy Maszyn Politechniki Łódzkiej zaangażowanych bezpośrednio w proces kształcenia w zakresie przedmiotu Podstawy Konstrukcji Maszyn.

dr inż. Andrzej Maciejczyk





# Rozdział 1

## SPRĘŻYNY

Opracowanie:

treści merytoryczne: dr inż. Andrzej Maciejczyk

zadania: dr inż. Grzegorz Mitukiewicz

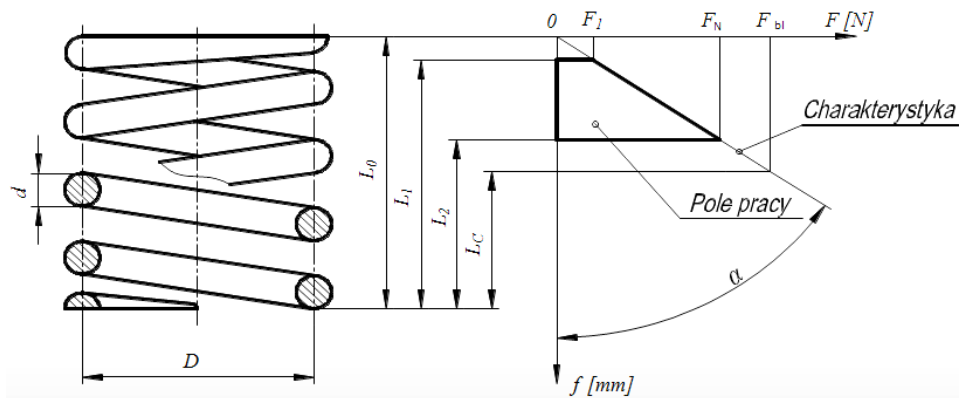
Sprężyny to elementy urządzeń ulegające odkształceniemu sprężystemu pod wpływem przyłożonego obciążenia.

Odkształcenie sprężyste jest uzyskiwane poprzez dobór określonego rodzaju materiału lub poprzez odpowiednie zaprojektowanie kształtu.

Zastosowanie elementów sprężystych:

- gromadzenie energii (napęd zegarków mechanicznych),
- pochłanianie energii (zderzaki),
- rozkład obciążenia (zawieszenie pojazdu, tapicerka),
- pochłanianie drgań (wirówki, sita),
- wywieranie sprężystego obciążenia (sprzęgła ciernie pojazdów),
- przyrządy pomiarowe,
- zawory ciśnieniowe i bezpieczeństwa,
- sprężyste elementy połączeniowe,

## Sprężyny walcowe naciskowe z drutu okrągłego



Rys. 1.1. Sprężyna walcowa naciskowa

Źródło: opracowanie własne.

## Naprężenia w sprężynie

$$\tau_s = k \frac{M_s}{W_o} \leq k_s,$$

gdzie:  $M_s$  – moment skręcający,

$W_o$  – wskaźnik na skręcanie,

$k$  – współczynnik poprawkowy (uwzględniający krzywiznę drutu, współczynnik Wahla),

$k_s$  – naprężenia dopuszczalne na skręcanie.



$$M_s = F \frac{D}{2},$$

$$W_0 = \frac{\pi d^3}{16},$$

gdzie: F – siła obciążająca sprężynę,  
D – średnia średnica sprężyny,  
d – średnica drutu.

$$\tau_s = k \frac{M_s}{W_0} = k \frac{8FD}{\pi d^3} \leq k_s = \frac{R_m}{x_m},$$

$R_m$  – minimalna wytrzymałość na rozciąganie,  
 $X_m$  – współczynnik bezpieczeństwa (zwykle przyjmuje się wartość 2).

### Naprężenia blokowania

$$\tau_{bl} = 1,12 * k_s.$$

### Współczynnik poprawkowy k

$$k = 1 + \frac{5}{4} \left( \frac{1}{w} \right) + \frac{7}{8} \left( \frac{1}{w} \right)^2 + \left( \frac{1}{w} \right)^3,$$

gdzie: w – wskaźnik sprężyny.

### Wskaźnik sprężyny „w”

$$w = \frac{D}{d}.$$

W celu uniknięcia wyboczenia sprężyny wartość wskaźnika powinna wynosić od 4 do 9 (10).

### Sztywność sprężyny

$$R = \frac{Gd}{8z_c} \left( \frac{1}{w} \right)^3,$$

gdzie:  $z_c$  – liczba zwojów czynnych,  
G – moduł sprężystości poprzecznej.

### Całkowita liczba zwojów

Całkowita liczba zwojów zależy od zakończenia sprężyny.

Tabela 1.1. Oznaczenia wykonania zakończeń sprężyny  
[wg PN-ISO 2162-2: 1996 / Ap1: 1999 – zakończenia sprężyn walcowych]

Oznaczenie	Wykonanie
<b>A</b>	Nie dogięte, nie szlifowane
<b>B</b>	Dogięte, nie szlifowane
<b>C</b>	Nie dogięte, szlifowane
<b>D</b>	Dogięte, szlifowane

Np. całkowita liczba zwojów sprężyny dogiętej i zeszlifowanej to  $z = z_c + 1,5$ .

### Siły zewnętrzne działające na sprężynę

$$F_i = R(L_0 - L_i),$$

gdzie:  $F_1$  – siła zmontowania,  
 $F_N$  – siła obciążenia,  
 $F_{bl}$  – siła zblokowania.

Z powyższego równania wynika charakterystyka pracy sprężyny przedstawiona na rys. 1.1.

### Zależności geometryczne

$L_0$  – długość swobodna sprężyny,  
 $L_1$  – długość sprężyny zmontowanej,  
 $L_N$  – długość sprężyny obciążonej,  
 $L_{bl}$  – długość sprężyny zblokowanej,

Ugięcie zmontowania:

$$s_1 = L_0 - L_1.$$

Ugięcie obciążenia:

$$s_N = L_0 - L_N.$$

Ugięcie zblokowania:

$$s_{bl} = L_0 - L_{bl}.$$

Długość sprężyny zblokowanej:

$$L_{bl} = (z + p)d,$$

gdzie:  $p = -0,5$  – dla sprężyn o zwojach dogiętych i zeszlifowanych,

- $p = +0,5$  – dla sprężyn dogiętych nieszlifowanych gdy liczba zwojów nie jest liczbą całkowitą,
- $p = +1$  – dla sprężyn dogiętych nieszlifowanych gdy liczba zwojów jest liczbą całkowitą.

Do obliczania długości sprężyny zblokowanej najczęściej wykorzystywany jest wzór uproszczony:

$$L_{bl} = (z - 0,5)d.$$

Minimalna suma prześwitów międzyzwojowych:

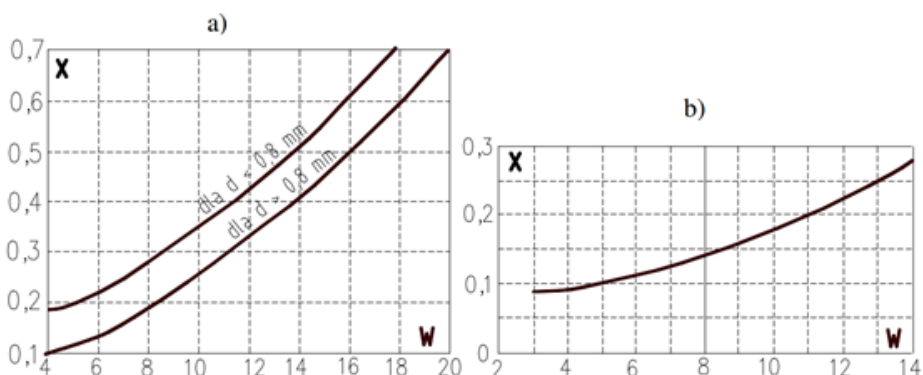
$$S_{a\ min} = L_N - L_{bl} = xdn.$$

Wartości współczynnika  $x$  wyznacza się na podstawie tabeli 1.2. lub wykresu z rys. 1.2.

Tabela 1.2. Wartości współczynnika  $x$  [wg PN-EN 13906-1:2003 – Sprężyny śrubowe walcowe z drutów lub prętów okrągłych -- Sprężyny naciskowe -- Obliczanie i konstrukcja]

Średnica drutu $d$ [mm]	Sposób zwijania sprężyny	Wartość współczynnika $x$
$d < 0,8$	zwijane na zimno	$x = 0,035w + 0,05$
$0,8 \leq d < 10$	zwijane na zimno	$x = 0,033(w - 1)$
$d > 16$	zwijane na gorąco	$x = 0,019w + 0,014$

Uwaga: Sprężyny o średnicach  $10 \leq d \leq 16$  mogą być zwijane zarówno na zimno, jak i na gorąco.



Rys. 1.2. Wartości współczynnika  $x$  dla sprężyn: a) zwijanych na zimno, b) na gorąco [wg PN-EN 13906-1:2003 – Sprężyny śrubowe walcowe z drutów lub prętów okrągłych -- Sprężyny naciskowe -- Obliczanie i konstrukcja]

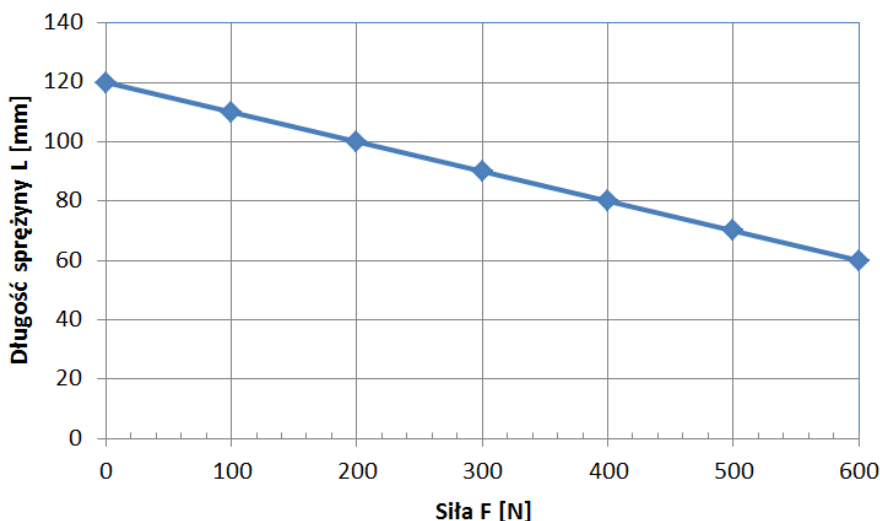
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 1.3. Orientacyjne własności wytrzymałościowe niektórych gatunków stali sprężynowych

Materiały i nr normy	Znak stali	R <sub>m</sub> minimum [MPa]	R <sub>e</sub> minimum [MPa]	Napężenia dopuszczalne (po obróbce cieplnej) – [MPa]						
				kg	kgj	kgo	ks	ksj	kso	
Stal sprężynowa PN-74/ H-84032	75	1100	00	540	00	50	20	40	50	
	65G	1000	800	480	60	30	0	220	40	
	50S2	1300	1100	660	70	00	00	80	80	
	50HG	1400	1200	720	50	20	30	30	0	
	50HS	1350	1200	720	10	10	30	00	85	
PN-71/ M-80057	60 SGH	1400	1250	750	50	20	50	30	0	
	drut patentowany (fortepianowy)	1600	1400	850	00	60	10	60	20	

## Zadanie 1

Na rysunku przedstawiono wykres zależności długości sprężyny w funkcji siły uginającej sprężynę.



Rys. 1.3. Charakterystyka sprężyny do Zadania 1  
*Źródło: opracowanie własne.*

Oblicz:

1. Jaką siłą należy działać na sprężynę, żeby ugiąć ją o 35 [mm].
2. Jakiemu ugięciu podlega sprężyna przy działaniu siłą 300 [N].
3. Wyznacz sztywność sprężyny.

## Rozwiązanie:

Przedstawiona zależność długości sprężyny w funkcji siły uginającej sprężynę jest zależnością liniową.

1. Z rysunku wynika, że do ugięcia sprężyny o 10 mm należy użyć siły 100 [N].  
Ażby dokonać ugięcia o 35 mm należy użyć siły o wartości  $x$ .  
stąd:

$$x = \frac{35 \cdot 100}{10} = 350 \text{ [N]}.$$

2. Pod obciążeniem 300 N sprężyna będzie miała długość  $l_{obc} = 90$  [mm].  
Zatem wartość ugięcia obliczono z zależności:

$$f_{obc} = l_0 - l_{obc} = 120 [mm] - 90 [mm] = 30 [mm].$$

3. Sztywność sprężyny to iloraz siły i ugięcia uzyskanego pod działaniem tej siły. Mając na uwadze wartości obliczeń zawarte w pkt. 2 możemy zapisać:

$$R = \frac{F_{obc}}{f_{obc}} = \frac{300}{30} = 10 [N/mm].$$

## Zadanie 2

Zaprojektować sprężynę naciskową z drutu okrągłego, zwijaną na zimno, prowadzoną dwustronnie o zwojach końcowych dogiętych i zeszlifowanych dla następujących danych:

Siła zmontowania –  $F_{zm} = 0 [N]$ ,

Siła obciążenia –  $F_{obc} = 1400 [N]$ ,

Sztywność (+-3%) –  $R = 105 \left[ \frac{N}{mm} \right]$ ,

Średnica zewnętrzna –  $D_z = 46 [mm]$ .

Założenia:

1. Materiał sprężyny to stal sprężynowa 65.
2. Wytrzymałość materiału na rozciąganie  $R_m = 980 [MPa]$ .
3. Moduł sprężystości postaciowej  $G = 78500 [MPa]$ .
4. Wskaźnik sprężyny  $w = \frac{D}{d} = 4$ .
5. Współczynnik bezpieczeństwa  $x_m = 2$  – zwijana na zimno.
6. Liczba zwojów biernych  $z_n = 1,5$ .
7. Stała prowadzenia sprężyny  $\nu = 0,5$  – sprężyna prowadzona dwustronnie.

## Rozwiązanie

1. Naprężenia dopuszczalne w sprężynie obciążonej:

$$\tau_{dop} = \frac{R_m}{x_m} = \frac{980}{2} = 490 [MPa].$$

2. Naprężenia dopuszczalne (styczne) w sprężynie zblokowanej:

$$\tau_{dop\_zb} = 1,12 \cdot \tau_{dop} = 1,12 \cdot 490 = 548,8 [MPa].$$

3. Współczynnik spiętrzenia naprężeń:

$$k = 1 + k \frac{5}{4} \left( \frac{1}{w} \right) + \frac{7}{8} \left( \frac{1}{w} \right)^2 + \left( \frac{1}{w} \right)^3 = 1 + \frac{5}{4} \left( \frac{1}{4} \right) + \frac{7}{8} \left( \frac{1}{4} \right)^2 + \left( \frac{1}{4} \right)^3 = 1,383$$

4. Wymagana średnica drutu:

$$d \geq \sqrt{\frac{8 \cdot F_{obc} \cdot w \cdot k}{\pi \cdot \tau_{dop}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1400 \cdot 4 \cdot 1,383}{\pi \cdot 490}} = 6,344 \text{ [mm]}.$$

Przyjmujemy wartość znormalizowaną  $d = 7 \text{ mm}$  (większą od  $6,344 \text{ mm}$ ).

5. Średnica średnia sprężyny

Gdyby nie było ograniczeń dotyczących średnicy zewnętrznej (ewentualnie wewnętrznej) obliczalibyśmy dalej tak:

$$D = w \cdot d = 4 \cdot 7 = 28 \text{ [mm]},$$

$$D_z = D + d = 28 + 7 = 35 \text{ [mm]}.$$

Ze względu na założony warunek na średnicę zewnętrzną sprężyny  $D_z = 46 \text{ mm}$  średnia średnica sprężyny wynosi:

$$D = D_z - d = 46 - 7 = 39 \text{ [mm].}$$

6. Dla otrzymanych wartości wyznaczamy nową wartość wskaźnika sprężyny:

$$w = \frac{D}{d} = \frac{39}{7} = 5,571,$$

oraz współczynnik spiętrzenia naprężeń:

$$k = 1 + \frac{5}{4} \left(\frac{1}{w}\right) + \frac{7}{8} \left(\frac{1}{w}\right)^2 + \left(\frac{1}{w}\right)^3 = 1 + \frac{5}{4} \left(\frac{1}{5,571}\right) + \frac{7}{8} \left(\frac{1}{5,571}\right)^2 + \left(\frac{1}{5,571}\right)^3 = 1,258.$$

7. Obliczamy naprężenia w sprężynie:

$$\tau_s = \frac{M_s}{W_0} \cdot k = \frac{F_{obc} \cdot \frac{D}{2}}{\frac{\pi d^3}{16}} \cdot k = \frac{8 F_{obc} \cdot D}{\pi d^3} \cdot k = \frac{8 \cdot 1400 \cdot 39}{\pi \cdot 7^3} \cdot 1,258 = 509,9 \text{ [MPa]}.$$

Ponieważ przekroczone są naprężenia dopuszczalne ( $\tau_{dop} = 490 \text{ MPa}$ ) możliwe są dwa rozwiązania:

- a. zwiększenie średnicy drutu,
- b. zmiana materiału drutu.

8. Zwiększamy średnicę drutu  $d = 8 \text{ mm}$  stąd:

$$D = D_z - d = 46 - 8 = 38 \text{ [mm]},$$

$$w = \frac{D}{d} = \frac{38}{8} = 4,75,$$

$$k = 1,311.$$

9. Wyznaczamy nową wartość naprężeń w sprężynie:

$$\tau_s = \frac{8 F_{obc} \cdot D}{\pi d^3} \cdot k = \frac{8 \cdot 1400 \cdot 38}{\pi \cdot 8^3} \cdot 1,311 = 346,9 \text{ [MPa]}.$$

Otrzymane naprężenia są mniejsze od naprężeń dopuszczalnych w związku z tym przyjmujemy ostatecznie:

- średnica drutu  $d = 8 \text{ mm}$ ,
- wskaźnik sprężyny  $w = 4,75$ ,
- średnica zewnętrzna sprężyny  $D_z = 46 \text{ mm}$ ,
- średnica średnia  $D = 38 \text{ mm}$ ,
- średnica wewnętrzna  $D_w = 30 \text{ mm}$ .

10. Liczba zwojów czynnych sprężyny:

$$z_c = \frac{G \cdot d}{8 \cdot R} \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^3 = \frac{78500 \cdot 8}{8 \cdot 105} \cdot \left(\frac{8}{38}\right)^3 = 6,976.$$

Liczbę zwojów czynnych zaokrąglamy do całości, ewentualnie 0,5 lub 0,25. Przyjmujemy liczbę zwojów czynnych  $z_c = 7$ .

11. Wyznaczamy rzeczywistą sztywność sprężyny:

$$R_{rz} = \frac{G \cdot d}{8 \cdot z_c} \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^3 = \frac{78500 \cdot 8}{8 \cdot 7} \cdot \left(\frac{8}{38}\right)^3 = 104,638 \left[\frac{N}{mm}\right]$$

12. Błąd bezwzględny sztywności:

$$\Delta R = R_{rz} - R = 104,638 - 105 = -0,362 \left[\frac{N}{mm}\right].$$

13. Błąd względny sztywności:

$$\delta R = \frac{\Delta R}{R} \cdot 100\% = \frac{-0,362}{105} \cdot 100\% = -0,34 [\%].$$

Zgodnie z założeniami sztywność projektowanej sprężyny powinna wynosić  $C = 105 \left[\frac{N}{mm}\right] \pm 3\%$ .

W związku z tym otrzymany błąd względny sztywności mieści się w dopuszczalnym zakresie.

14. Rzeczywiste odkształcenia sprężyny obciążonej:

$$f_{obc} = \frac{F_{obc}}{R_{rz}} = \frac{1400}{104,638} = 13,4 [mm].$$

15. Całkowita liczba zwojów:

$$z = z_c + z_b = 7 + 1,5 = 8,5.$$

16. Minimalny prześwit między zwojami sprężyny obciążonej:

Sprężyna naciskowa nie może pracować do zablokowania. Należy zapewnić minimalny luz pomiędzy zwojami przy pełnym obciążeniu sprężyny. Luz ten określa się jako minimalny prześwit i określony jest wzorem:



$$a = x \cdot d.$$

gdzie  $x$  jest to współczynnik prześwitu, który można odczytać z wykresu (rys. 1.2) lub wyznaczyć ze wzoru:

- dla  $d \geq 0,8$   $x = 0,03267 + 0,01129 \cdot w + 0,00111 \cdot w^2$ ,
- dla  $d < 0,8$   $x = 0,90267 + 0,01129 \cdot w + 0,00111 \cdot w^2$ .

Ponieważ projektowana sprężyna wykonana jest z drutu  $d = 8 \text{ mm}$  współczynnik prześwitu wynosi:

$$x = 0,03267 + 0,01129 \cdot 4,75 + 0,00111 \cdot 4,75^2 = 0,11.$$

Ostatecznie przyjęto  $x = 0,1$ .

Dlatego minimalny prześwit między zwojami wynosi:

$$a = 0,1 \cdot 8 = 0,8 \text{ [mm]}.$$

17. Sumaryczny prześwit między zwojami sprężyny obciążonej:

$$S_{amin} \cdot z_c = 0,8 \cdot 7 = 5,6 \text{ [mm]}.$$

18. Nominalna długość sprężyny zblokowanej:

Nominalną długość sprężyny wyliczamy ze wzoru:

$$l_{bl \text{ nom}} = (z - 0,5) \cdot d = (8,5 - 0,5) \cdot 8 = 64 \text{ [mm]}.$$

19. Długość sprężyny zblokowanej z uwzględnieniem odchyłek wykonania:

$$l_{bl \text{ nom}} = l_{bl \text{ nom}} + 0,5d = 64 + 0,5 \cdot 8 = 68 \text{ [mm]}.$$

20. Długość sprężyny obciążonej:

$$l_{obc} = l_{bl} + \sum a = 68 + 5,6 = 73,6 \text{ [mm]}.$$

21. Długość sprężyny nieobciążonej (w stanie swobodnym):

$$l_0 = l_{obc} + f_{obc} = 73,6 + 13,4 = 87 \text{ [mm]}.$$

22. Długość sprężyny zmontowanej:

$$l_{zm} = l_0 - f_{zm} = 87 - 0 = 87 \text{ [mm]}.$$

23. Długość czynna sprężyny:

$$l = l_0 - d = 87 - 8 = 79 \text{ [mm]}.$$

24. Skok zwojów:

$$s = \frac{l}{z_c} = \frac{79}{7} = 11,29 \text{ [mm]}.$$

25. Kąt pochylenia zwojów:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{s}{\pi D}\right) \arctg\left(\frac{11,29}{\pi \cdot 38}\right) = 5,4025^\circ.$$

26. Długość drutu zwojów czynnych:

$$L_c = \frac{l}{\sin\alpha} = \frac{79}{\sin(5,4025^\circ)} = 839,1 \text{ [mm]}.$$

27. Długość drutu zwojów biernych:

$$L_b = \pi \cdot D \cdot z_b = \pi \cdot 38 \cdot 1,5 = 179,1 \text{ [mm]}.$$

28. Całkowita długość drutu:

$$L = L_c + L_b = 839,1 + 179,1 = 1018,2 \text{ [mm]}.$$

29. Ugięcie sprężyny zblokowanej:

$$f_{bl} = l_0 - l_{bl} = 87 - 68 = 19 \text{ [mm]}.$$

30. Obciążenie sprężyny zblokowanej:

$$F_{bl} = C_{rz} \cdot f_{bl} = 104,638 \cdot 19 = 1988,1 \text{ [mm]}.$$

Obliczenia sprawdzające:

1. Naprężenia w sprężynie obciążonej:

$$\tau_s = \frac{8F_{obc} \cdot D}{\pi d^3} \cdot k = \frac{8 \cdot 1400 \cdot 38}{\pi \cdot 8^3} \cdot 1,311 = 346,9 \text{ [MPa]}.$$

2. Naprężenia styczne (bez współczynnika k) w sprężynie zblokowanej:

$$\tau_{bl} = \frac{8F_{bl} \cdot D}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 1988,1 \cdot 38}{\pi \cdot 8^3} = 375,7 \text{ [MPa]}.$$

3. Współczynnik bezpieczeństwa dla sprężyny w stanie obciążonym:

$$x_m = \frac{R_m}{\tau_s} = \frac{980}{346,9} = 2,825.$$

4. Wyboczenie sprężyny:

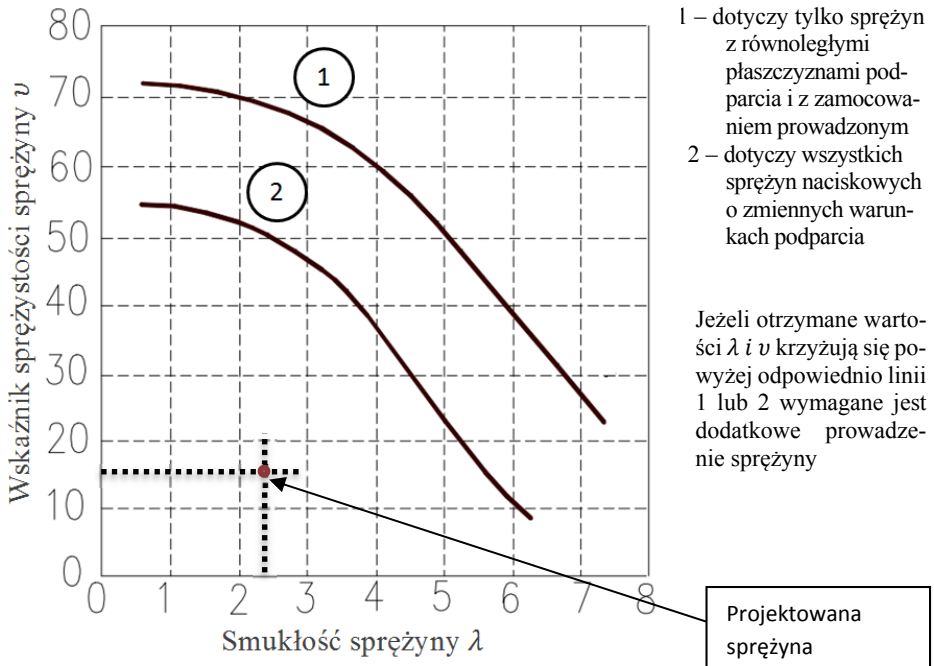
(Ten etap jest możliwy do pominięcia z uwagi na przyjętą wartość wskaźnika „w”).

a. Wskaźnik smukłości sprężyny:

$$\lambda = \frac{l_0}{D} = \frac{87}{38} = 2,29.$$

b. Wskaźnik sprężystości sprężyny:

$$\eta = \frac{f_{obc}}{l_0} \cdot 100 = \frac{13,4}{87} \cdot 100 = 15,4\%.$$



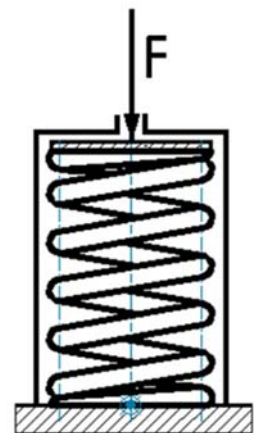
Rys. 1.4. Graficzne potwierdzenie poprawności dokonanych obliczeń dla Zadania 2

Źródło: opracowanie własne.

Projektowana sprężyna nie wyboczy się.

### Zadanie 3

Naprężenia w sprężynie zmontowanej wynoszą  $120 \text{ MPa}$ . Siła obciążenia tej sprężyny wynosi  $F_{\text{obc}} = 1500 \text{ N}$ . Przyrost ugięcia pod wpływem siły obciążenia wynosi  $\Delta f = 50 \text{ mm}$ .



Rys. 1.5. Schemat obciążenia sprężyny do Zadania 3

Wyznaczyć:

- 1 – sztywność sprężyny,
- 2 – całkowitą liczbę zwojów,
- 3 – długość swobodną sprężyny,
- 4 – narysować wykres naprężeń w sprężynie w funkcji obciążenia zewnętrznego.

Dane:

średnica drutu sprężyny –  $d = 8 \text{ [mm]}$ ,

średnica średnia sprężyny –  $D = 50 \text{ [mm]}$ ,

moduł sprężystości postaciowej –  $G = 80000 \text{ [MPa]}$ ,

$\tau_{zm} = 120 \text{ [MPa]}$ ,

$F_{obc} = 1500 \text{ [N]}$ ,

$\Delta f = 50 \text{ [mm]}$ .

## Rozwiązanie

1. Wskaźnik sprężyny:

$$w = \frac{D}{d} = \frac{50}{8} = 6,25.$$

2. Współczynnik spiętrzenia naprężeń:

$$k = 1 + \frac{5}{4} \left(\frac{1}{w}\right) + \frac{7}{8} \left(\frac{1}{w}\right)^2 + \left(\frac{1}{w}\right)^3 = 1 + \frac{5}{4} \left(\frac{1}{6,25}\right) + \frac{7}{8} \left(\frac{1}{6,25}\right)^2 + \left(\frac{1}{6,25}\right)^3 = 1,226496.$$

3. Naprężenia w sprężynie obciążonej:

$$\tau_s = \frac{8F_{obc} \cdot D}{\pi d^3} \cdot k = \frac{8 \cdot 1500 \cdot 50}{\pi \cdot 8^3} \cdot 1,226496 = 457,5086 \text{ [MPa]}.$$

4. Siła zmontowania sprężyny:

$$\tau_{zm} = \frac{8F_{zm}}{\pi d^2} w \cdot k \Rightarrow F_{zm} = \frac{8\tau_{zm}}{\pi d^2} w \cdot k = \frac{8 \cdot 120}{\pi \cdot 8^2} \cdot 6,25 \cdot 1,311 = 393,4 \text{ [N]}.$$

5. Sztywność sprężyny:

$$R = \frac{\Delta F}{\Delta f} = \frac{F_{obc} - F_{zm}}{\Delta f} = \frac{1500 - 393,4}{50} = 22,13 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}}\right].$$

6. Liczba zwojów czynnych:

$$z_c = \frac{d \cdot G}{8 \cdot R \cdot w^3} = \frac{8 \cdot 80000}{8 \cdot 22,13 \cdot 6,25^3} = 14,81.$$

6.a Przyjmuję liczbę zwojów czynnych:  $z_c = 15$ .

7. Zakładam liczbę zwojów biernych:

$$z_b = 1,5.$$

8. Całkowita liczba zwojów:

$$z = z_c + z_b = 15 + 1,5 = 16,5.$$

9. Wyznaczam wartość wsp. przeswitów dla  $d \geq 0,8$  (rys. 1.2; tab. 1.2) lub

$$x = 0,90267 + 0,01129 \cdot w + 0,00111 \cdot w^2,$$

$$x = 0,90267 + 0,01129 \cdot 6,25 + 0,00111 \cdot 6,25^2 = 0,146592.$$

10. Długość zblokowanej sprężyny:

$$l_{bl\ nom} = (z - 0,5) \cdot d = (16,5 - 0,5) \cdot 8 = 128 [mm].$$

11. Długość sprężyny zblokowanej przy uwzględnieniu wymaganych przeswitów:

$$l_{bl} = l_{bl\ nom} + z_c \cdot x \cdot d = 128 + 15 \cdot 0,146592 \cdot 8 = 145,6 [mm].$$

12. Ugięcie pracy sprężyny pod działaniem siły  $F_{obc}$ :

$$f_{obc} = \frac{F_{obc}}{R} = \frac{1500}{22,13} = 67,78 [mm].$$

13. Ugięcie pracy sprężyny pod działaniem siły:

$$f_{zm} = \frac{F_{zm}}{R} = \frac{393,4}{22,13} = 17,78.$$

14. Sprawdzenie ugięcia sprężyny:

$$f_{obc} = f_{zm} + \Delta f = 17,78 + 50 = 67,78 [mm].$$

15. Długość swobodna sprężyny:

$$l_0 = l_{bl} + f_{obc} = 145,6 + 67,78 = 213,38 [mm].$$

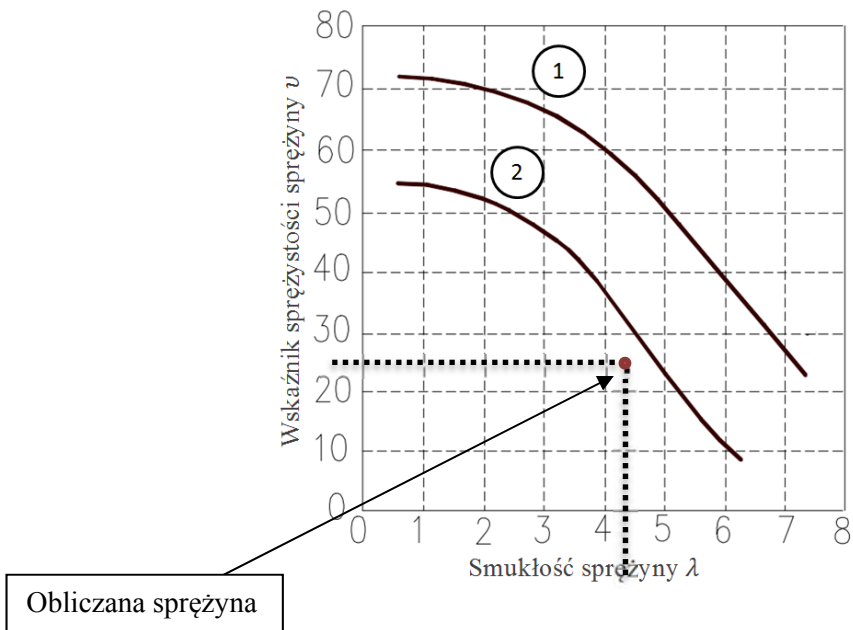
16. Wyboczenie sprężyny:

a. Wskaźnik smukłości sprężyny:

$$\lambda = \frac{l_0}{D} = \frac{213,38}{50} = 4,27.$$

b. Wskaźnik sprężystości sprężyny:

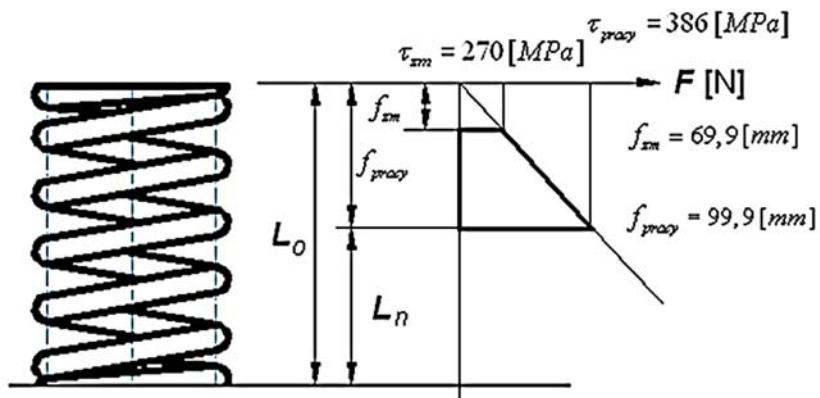
$$\eta = \frac{f_{obc}}{l_0} \cdot 100 = \frac{67,78}{213,38} \cdot 100 = 31,8\%.$$



Rys. 1.6. Graficzne potwierdzenie poprawności dokonanych obliczeń dla Zadania 3  
*Źródło: opracowanie własne.*

Sprężyna nie wyboczy się przy założeniu obustronnego prowadzenia końców. Otrzymane wartości  $\lambda$  i  $v$  krzyżują się poniżej linii „2” która odpowiada temu warunkowi.

### 17. Wykres pracy sprężyny

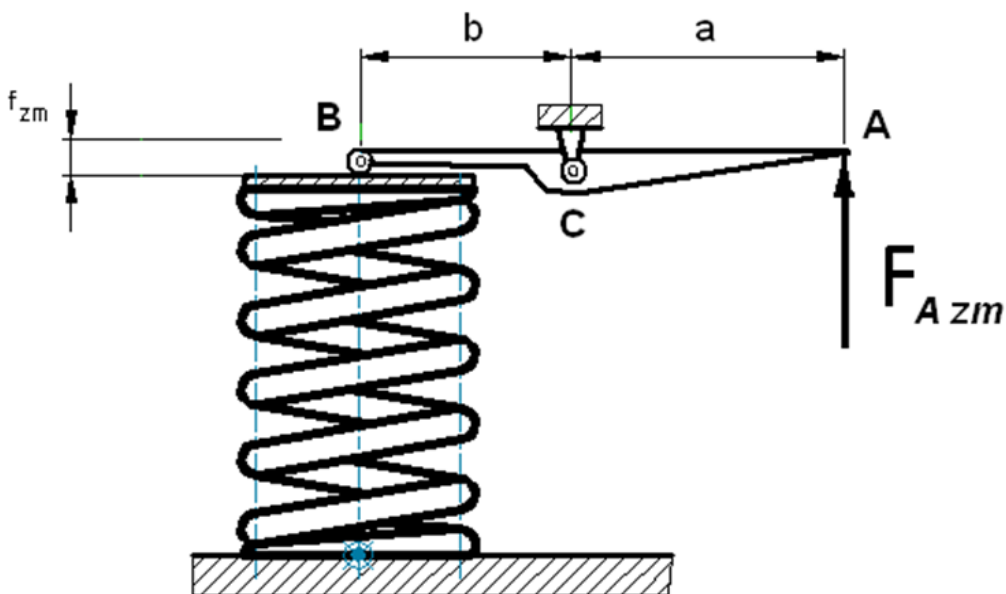


Rys. 1.7. Wykres pracy sprężyny dla Zadania 3  
*Źródło: opracowanie własne.*

## Zadania do samodzielnego rozwiązania

### Zadanie 1

Zaprojektować sprężynę śrubową naciskową (patrz rysunek), dla której maksymalne (dopuszczalne z uwagi na uniknięcie zablokowania) obciążenie zewnętrzne w p. A przyłożenia siły wynosi  $F_{Amax} = 200 [N]$ .



Rys. 1.8. Zadania do samodzielnego rozwiązania. Sprężyny. Schemat do Zadania 1

Źródło: opracowanie własne.

Dane:

- strzałka ugięcia w punkcie B przy zmontowaniu sprężyny  $f_{Bzm} = 10 [mm]$ ,
- siła zmontowania w punkcie A  $F_{Azm} = 50 [N]$ ,
- $a = 500 [mm]$ ,
- $b = 200 [mm]$ ,
- średnica drutu  $d = 6 [mm]$ ,
- średnica średnia sprężyny  $D = 60 [mm]$ ,
- wytrzymałość materiału na rozciąganie  $R_m = 980 [MPa]$ ,
- moduł sprężystości postaciowej  $G = 78500 [MPa]$ .

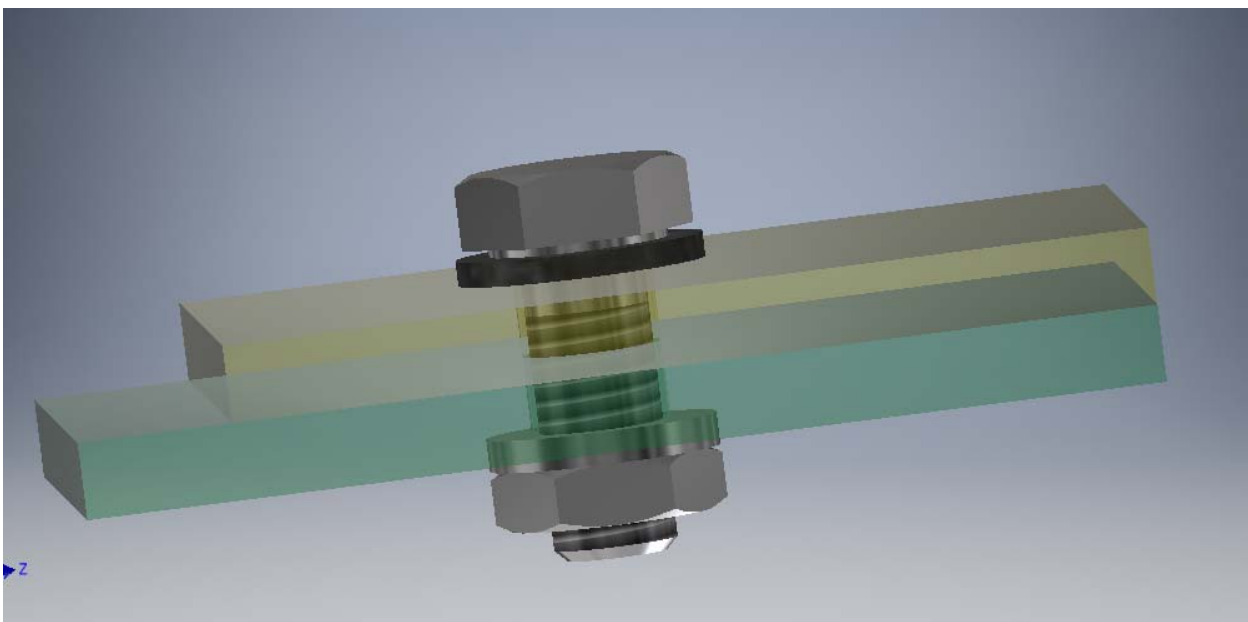
## Zadanie 2

Sprężynę naciskową obciążono siłą  $2000\text{ N}$  wywołując ugięcie  $50\text{ mm}$ . Sprawdzić, czy nie zostały przekroczone naprężenia dopuszczalne. Przyjąć wymagany współczynnik bezpieczeństwa równy 2.

Dane:

- liczba zwojów czynnych sprężyny  $z_c = 16$ ,
- wytrzymałość materiału na rozciąganie  $R_m = 980\text{ [MPa]}$ ,
- moduł sprężystości postaciowej  $G = 78500\text{ [MPa]}$ ,
- średnica średnia sprężyny  $D = 40\text{ [mm]}$ .





## Rozdział 2

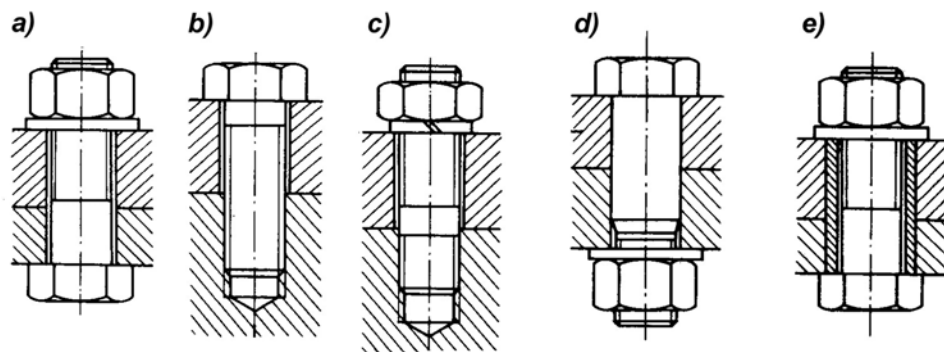
### POŁĄCZENIA GWINTOWE (ŚRUBOWE)

Opracowanie:

treści merytoryczne: dr inż. Andrzej Maciejczyk

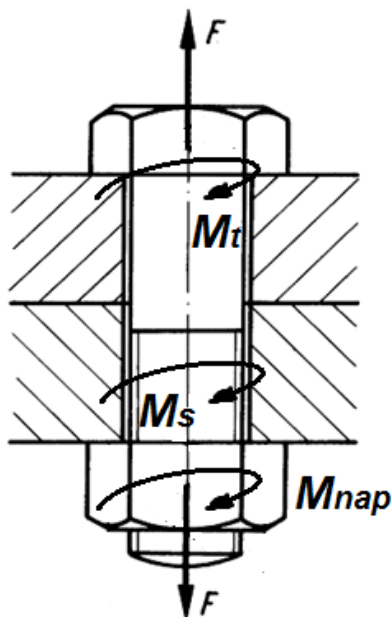
zadania: dr inż. Sergiusz Zakrzewki, dr inż. Arkadiusz Kądziała

Wykorzystywanie połączeń gwintowych do mocowania, łączenia elementów oraz części maszyn i urządzeń należy niewątpliwie do najbardziej rozpowszechnionych metod stosowanych w szeroko pojętych konstrukcjach mechanicznych. Zarówno gwinty, jak też śruby i nakrętki podlegają normalizacji. Ma to na celu zapewnienie pełnej zamienności uszkodzonych lub zużytych elementów połączeniowych. Przykłady połączeń gwintowych realizowanych za pomocą śrub oraz śrub z nakrętkami przedstawiono na rysunku 2.1.



Rys. 2.1. Przykłady połączeń gwintowych  
*Źródło: opracowanie własne.*

### Obciążenia wewnętrzne w gwincie:



Rys. 2.2. Schemat rozkładu obciążeń w śrubie  
*Źródło: opracowanie własne.*

### Moment sił tarcia w gwincie:

$$M_s = \frac{d_2}{2} F_0 t g(\gamma \mp \rho'),$$

gdzie:  $\gamma$  – kąt pochylenia (kąt wzniosu linii śrubowej,

$\rho'$  – pozorny kąt tarcia,

$F_0$  – napięcie wstępne śruby,

$d_2$  – średnia średnica gwintu.

Uwaga: znak „+” w równaniu dotyczy dokręcania śruby, znak „-” odkręcania.

### Moment sił między łbem śruby i nakrętką:

$$M_t = F_0 \mu_m \left( \frac{S+d_h}{4} \right),$$

gdzie:  $\mu_m$  – współczynnik tarcia między łbem i nakrętką,

$S$  – wymiar pod klucz łbów sześciokątnych,

$d_h$  – średnica otworu przejściowego.

### Moment napinający w gwincie:

$$M_{nap} = M_s + M_t,$$

$$M_{nap} = \frac{d_2}{2} F_0 t g(\gamma + \rho') + F_0 \mu_m \left( \frac{S+d_h}{4} \right).$$

### Warunek samohamowności gwintu:

Połączenie śrubowe będzie samohamowne jeśli dowolna siła osiowa  $F$  obciążająca śrubę nie wywoła jej obrotu (odkręcania).

Zatem

$$M_s = \frac{d_2}{2} F_0 t g(\gamma - \rho') \leq 0,$$

stąd:

$$\gamma \leq \rho'.$$

### Obciążenia w połączeniu gwintowym:

– warunek przenoszenia obciążeń stycznych (napięcie resztkowe):

$$F' = \frac{T_{wyp}}{\mu}.$$

$T_{wyp}$  – wypadkowa obciążeń stycznych (max.),

$\mu$  – współczynnik tarcia w gwincie.

– maksymalne obciążenie śruby:

$$F_s = F' + F_{N,Mg},$$

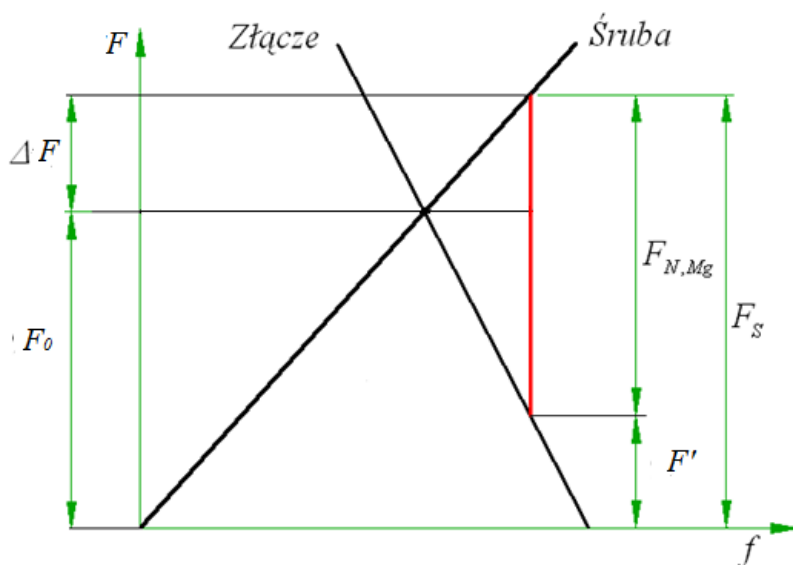
$F_{N,Mg}$  – obciążenie śruby siłami normalnymi i momentami gnącymi.

– napięcie wstępne śruby:

$$F_0 = F_s - \frac{\Delta F}{F} F_{N,Mg},$$

$\Delta F/F = 0,15-0,25$  współczynnik sztywności złącza.

Wykres pracy złącza śrubowego:



Rys. 2.3. Wykres pracy złącza śrubowego

Źródło: opracowanie własne.

## Wymiary gwintów metrycznych

Tabela 2.1. Podstawowe wymiary gwintów metrycznych [wg PN-ISO 898-1:2001]

Gwint	Ar	As	$p_z$	$d_2$	$d_3$	d	Do
M4	7,44	8,78	0,7	3,545	3,078	4,5	7
M5	12,2	14,2	0,8	4,48	3,948	5,5	8
M6	17,2	20,1	1	5,35	4,684	6,6	10
M8	31,7	36,6	1,25	7,188	6,355	9	14(13)
M10	50,6	58	1,5	9,026	8,026	11	17

M12	73,9	84,3	1,75	10,683	9,698	14	19
M16	141	157	2	14,701	13,369	18	24
M20	219	245	2,5	18,376	16,712	22	30
M22	275	303	2,5	20,376	18,712	24	32
M24	317	353	3	22,051	20,054	26	36
M27	419	459	3	25,051	23,054	30	41
M30	507	561	3,5	27,727	25,395	33	46

gdzie:  $A_r$  – pole powierzchni rdzenia,  
 $A_s$  – średnie pole powierzchni gwintu,  
 $p_z$  – podziałka (skok gwintu),  
 $d_2$  – średnica rdzenia,  
 $d_3$  – średnia średnica gwintu,  
 $d$  – średnica otworu przejściowego,  
 $D_0$  – wymiar klucza.

## Wymagana średnica rdzenia śruby

Naprężenia rozciągające:

$$\sigma_r = \frac{F_s}{A_r} \leq k_r,$$

W obliczeniach stosowany jest współczynnik częściowy nośności  $\gamma_{M3} = 1,25$  dotyczący węzłów wg PN-EN 1993-1-8.

Stąd:

$$1,25 * \frac{F_s}{A_r} \leq k_r.$$

Zatem ostatecznie

$$A_r \geq \frac{1,25F_s}{k_r},$$

gdzie:

$$k_r = \frac{R_e}{x_e}$$

$x_e$  współczynnik bezpieczeństwa (zwykle  $x_e = 2$ ).

Do wyznaczenia wartości  $R_e$  należy posłużyć się zależnościami poniżej:

$$R_m = A * 100$$

$$R_e = 0,1 * B * R_m$$

po uprzednim przyjęciu klasy własności materiału śruby wg schematu:

$A$  – pierwsza cyfra (liczba) w oznaczeniu klasy własności,

$B$  – druga cyfra w oznaczeniu klasy własności.

Możliwe jest również bezpośredni odczyt wartości  $R_e$  z tabeli 2.2.

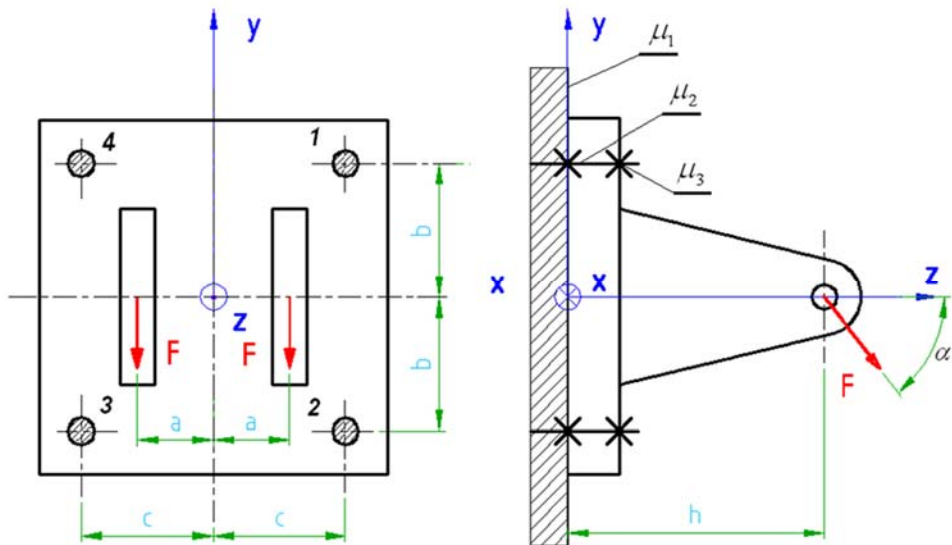
Tabela 2.2. Klasy własności oraz materiały stosowane na śruby  
[wg PN-EN 28839:1999]

Klasa własności materiału	Rodzaj stali, stan stali	Maksymalna zawartość węgla	$R_e$ [MPa]	$R_m$ [MPa]
3.6	Stal niskowęglowa	0,2	180	300
4.6 4.8	Stal nisko- lub średniowęglowa	0,55	240 320	400 400
5.6 5.8 6.6 6.8	Stal nisko- lub średniowęglowa	0,55	300 400 360 480	500 500 600 600
8.8	Stal niskowęglowa z dodatkami stopowymi; H i O Stal średniowęglowa; H i O	0,35 0,55	640	800
10.9	Stal niskowęglowa z dodatkami stopowymi; H i O Stal średniowęglowa; H i O Stal średniowęglowa z dodatkami stopowymi; H i O Stal niskostopowa	0,35 0,55 0,55 0,55	900	1000
12.9	Stal niskostopowa	0,50	1080	1200
H i O – Stal hartowana i odpuszczana				

## Zadanie 1

Dla złącza przedstawionego na rys. 2.4 wyznaczyć:

- 1 – średnicę śrub,
- 2 – wykres pracy złącza,
- 3 – moment napinający,
- 4 – rzeczywisty współczynnik bezpieczeństwa.



Rys. 2.4. Schemat obciążenia wspornika dla Zadania 1

Źródło: opracowanie własne.

Dane:

- liczba śrub
- siła
- podatność złącza
- współczynniki tarcia
- wymagany współczynnik bezpieczeństwa
- wymiary złącza :

$$z = 4,$$

$$F = 1000 \text{ [N]},$$

$$(\Delta F/F) = 0,25,$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0,1,$$

$$x_{wym} = 2,5,$$

$$a = 100 \text{ [mm]},$$

$$b = 100 \text{ [mm]},$$

$$c = 150 \text{ [mm]},$$

$$h = 200 \text{ [mm]},$$

$$\alpha = 30 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

Uwaga! przyjąć klasę wytrzymałości materiału śrub: 5.8.

## Rozwiązanie

1. Składowe siły F.

- składowa normalna:

$$F_z = F \cdot \cos(\alpha) = 866,02 \text{ [N]},$$

- składowa styczna:

$$F_y = -F \cdot \sin(\alpha) = -500 \text{ [N]}.$$

## 2. Siły w złączu.

– siła normalna:

$$N_F = 2 \cdot F_z = 1732,05 [N],$$

– siła styczna:

$$T_F = 2 \cdot F_y = -1000 [N],$$

– moment gnący względem osi x:

$$M_{g(x)} = T_F \cdot h = 200000 [Nmm],$$

– moment gnący względem osi y:

$$M_{g(y)} = N_F \cdot a - N_F \cdot a = 0 [Nmm],$$

– moment skręcający względem osi z:

$$M_{s(z)} = T_F \cdot a - T_F \cdot a = 0 [Nmm].$$

## 3. Siły w śrubach.

– siła normalna od siły  $N_F$ :

$$N_{F(1,2,3,4)} = \frac{N_F}{z} = 433,01 [N],$$

– siła normalna od  $M_{g(x)}$ :

$$N_{Mg(x)(1,4)} = M_{g(x)} \cdot \frac{y_{F(1,4)}}{\sum_{i=1}^z y_i^2} = 500 [N],$$

$$N_{Mg(x)(2,3)} = M_{g(x)} \cdot \frac{-y_{F(2,3)}}{\sum_{i=1}^z y_i^2} = -500 [N],$$

– siła normalna od  $M_{g(y)}$ :

$$N_{Mg(y)(1,2,3,4)} = 0 [N],$$

– siła styczna od siły  $T_F$ :

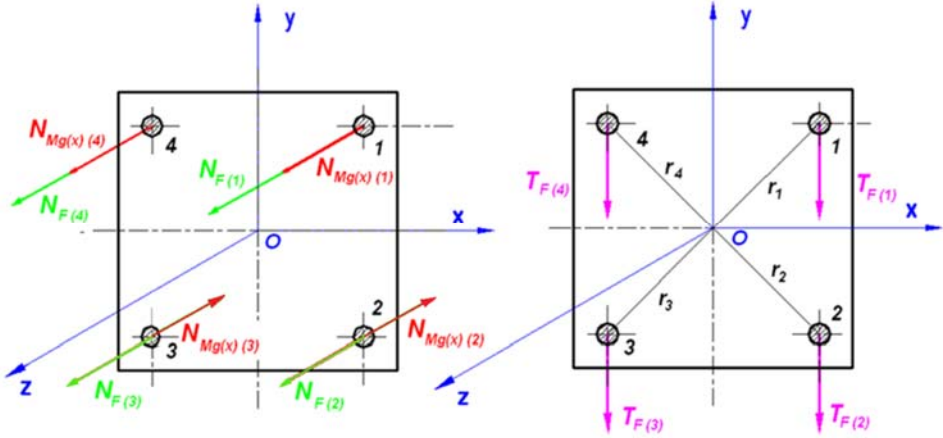
$$T_{F(1,2,3,4)} = \frac{T_F}{z} = -250 [N],$$

– siła styczna od momentu skręcającego  $T_{Ms(z)}$ :

$$T_{Ms(z)(1,2,3,4)} = 0 [N],$$

## 4. Siły w śrubach





Rys. 2.5. Szkic obciążeń poszczególnych śrub wspornika dla Zadania 1  
*Źródło: opracowanie własne.*

- z rys. widać, że najbardziej obciążone są śruby: 1 i 4.

5. Siły wypadkowe w śrubie 1 i 4.

$$T_{wyp(1,4)} = T_F + T_{Ms} = -250 \quad [N],$$

$$F_{N,Mg(1,4)} = N_{wyp(1,4)} = N_{F(1,4)} + N_{Mg(x)(1,4)} + N_{Mg(y)(1,4)} = 933,01 \quad [N].$$

6. Wykres pracy złącza.

- Napięcie resztkowe:

$$Q' = \frac{T_{wyp(1,4)}}{\mu} = 2500 \quad [N].$$

- Obciążenie śruby siłą normalną:

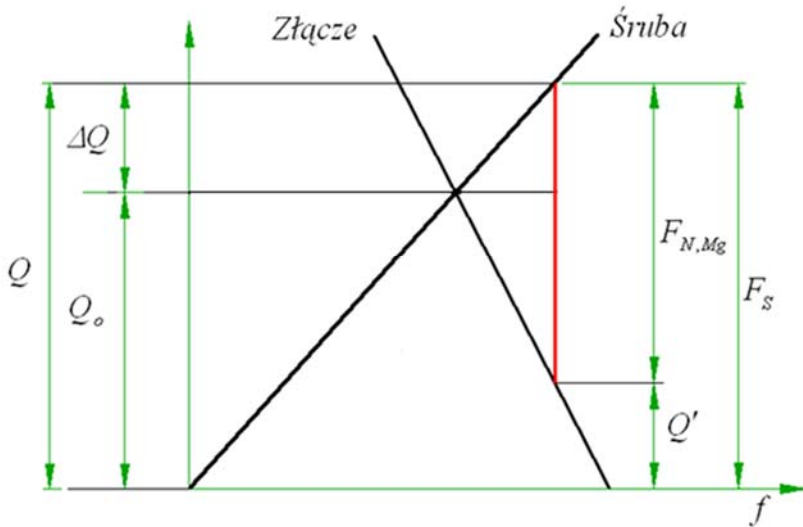
$$F_{N,Mg(1,4)} = 933,01 \quad [N].$$

- Całkowite obciążenie śruby:

$$F_{S(1,4)} = F_{N,Mg(1,4)} + Q' = 3433,01 \quad [N].$$

- Napięcie wstępne śruby:

$$Q_0 = Q - \Delta Q = F_S - \left(\frac{\Delta F}{F}\right) \cdot F_{N,Mg} = 3199,76 \quad [N].$$



Rys. 2.6. Wykres pracy złącza śrubowego dla Zadania 1  
*Źródło: opracowanie własne.*

7. Granice wytrzymałości materiału śrub:

$$R_m = 500 \text{ [MPa]},$$

$$R_e = 400 \text{ [MPa]}.$$

8. Naprężenia dopuszczalne:

$$k_r = \frac{R_e}{x_{ewym}} = 160 \text{ [MPa]}.$$

9. Wymagany przekrój śrub:

– współczynnik zabezpieczający przed poluzowaniem śrub 1,25

$$A_r = \frac{1,25 \cdot F_S}{k_r} = 26,8 \text{ [mm}^2\text{]}.$$

10. Dobór śrub (tabela 2.1):

– doбираю śruby M8

$$A_r = 31,7 \text{ [mm}^2\text{]},$$

$$p_z = 1,25 \text{ [mm]},$$

$$d_2 = 7,188 \text{ [mm]},$$

$$d = 9 \text{ [mm]},$$

$$D_0 = 14 \text{ [mm]},$$

$$\alpha = 30 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

11. Kąt wzniosu linii śrubowej:

$$\gamma = \arctg\left(\frac{p_z}{\pi \cdot d_2}\right) = 0,055298 \text{ [rd]},$$
$$\gamma = 3,16834 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

12. Kąt tarcia w gwincie:

– połowa kąta wierzchołkowego gwintu  $\alpha = 30 \text{ [}^\circ\text{]}$

$$\alpha = 0,523599 \text{ [rd]},$$
$$\rho' = \arctg\left(\frac{tg(\rho)}{\cos(\alpha)}\right) = \arctg\left(\frac{\mu_2}{\cos(\alpha)}\right) = 0,114961 \text{ [rd]},$$
$$\rho' = 6,586776 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

13. Moment napinający śrubę:

$$M_{nap} = Q_0 \cdot \left[\frac{d_2}{2} \cdot tg(\gamma + \rho') + \mu_3 \cdot \left(\frac{D_0 + d}{4}\right)\right] = 3816,97 \text{ [Nmm]}.$$

Obliczenia sprawdzające:

1. Moment tarcia w gwincie:

$$M_T = Q_0 \cdot \frac{d_2}{2} \cdot tg(\gamma + \rho') = 1977,11 \text{ [Nmm]}.$$

2. Pole przekroju rdzenia śruby:

$$A_r = \frac{\pi \cdot d_3^2}{4} = 31,72 \text{ [mm}^2\text{]}.$$

3. Wskaźnik przekroju rdzenia śruby na skręcanie:

$$W_0 = \frac{\pi \cdot d_3^3}{16} = 50,39 \text{ [mm}^3\text{]}.$$

4. Naprężenia rozciągające w śrubie:

$$\sigma_r = \frac{F_S}{A_r} = 108,23 \text{ [MPa]}.$$

5. Naprężenia skręcające w śrubie:

$$\tau = \frac{M_T}{W_0} = 39,23 \text{ [MPa]}.$$

6. Naprężenia zastępcze:

$$\sigma_{zast} = \sqrt{\sigma_r + 3\tau} = 127,8 \text{ [MPa]}.$$

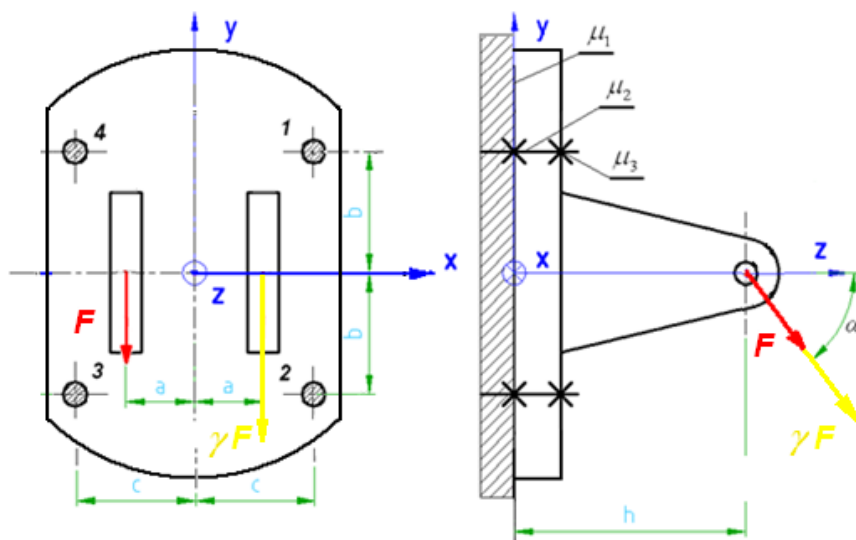
7. Rzeczywisty współczynnik bezpieczeństwa:

$$x_e = \frac{R_e}{\sigma_{zast}} = 3,13,$$
$$x_e = 3,13 \geq x_{wym} = 2,5.$$

## Zadanie 2

Dla złącza przedstawionego na rys. 2.7 wyznaczyć:

- 1 – średnicę śrub,
- 2 – wykres pracy złącza,
- 3 – moment napinający,
- 4 – rzeczywisty współczynnik bezpieczeństwa.



Rys. 2.7. Schemat obciążenia wspornika dla Zadania 2

Źródło: opracowanie własne.

Dane:

- |  |                              |
|--|------------------------------|
| – liczba śrub                          | $z = 4,$                     |
| – siła                                 | $F = 1500 [N],$              |
| – podatność złącza                     | $(\Delta F/F) = 0,25,$       |
| – współczynniki tarcia                 | $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0,$ |
| – wymagany współczynnik bezpieczeństwa | $x_{wym} = 2,5,$             |
| – wymiary złącza:                      | $a = 100 [mm],$              |
|  | $b = 150 [mm],$              |
|  | $c = 150 [mm],$              |
|  | $h = 250 [mm],$              |
|  | $\alpha = 30 [^\circ].$      |

Uwaga! przyjąć klasę wytrzymałości materiału śrub: 6.8.

## Rozwiązanie

### 1. Składowe siły F.

– składowa normalna:

$$F_z = F \cdot \cos(\alpha) = 1299,04 [N],$$

– składowa styczna:

$$F_y = -F \cdot \sin(\alpha) = -750 [N],$$

### 2. Siły w złączu.

– siła normalna:

$$N_F = F_z + \gamma \cdot F_z = 3117,69 [N],$$

– siła styczna:

$$T_F = F_y + \gamma \cdot F_y = -1800 [N],$$

– moment gnący względem osi x:

$$M_{g(x)} = T_F \cdot h = 450000 [Nmm],$$

– moment gnący względem osi y:

$$M_{g(y)} = F_z \cdot a - \gamma \cdot F_z \cdot a = -51961,52 [Nmm],$$

– moment skręcający względem osi z:

$$M_{s(z)} = F_y \cdot a - \gamma \cdot F_y \cdot a = -30000 [Nmm],$$

### 3. Siły w śrubach.

– siła normalna od siły  $N_F$ :

$$N_{F(1,2,3,4)} = \frac{N_F}{z} = 779,42 [N],$$

– siła normalna od  $M_{g(x)}$ :

$$N_{M_{g(x)}(1,4)} = M_{g(x)} \cdot \frac{y_{F(1,4)}}{\sum_{i=1}^z y_i^2} = 750 [N],$$

$$N_{M_{g(x)}(2,3)} = M_{g(x)} \cdot \frac{-y_{F(2,3)}}{\sum_{i=1}^z y_i^2} = -750 [N],$$

– siła normalna od  $M_{g(y)}$ :

$$N_{M_{g(y)}(1,2)} = 86,6 [N],$$

$$N_{M_{g(y)}(3,4)} = -86,6 [N],$$

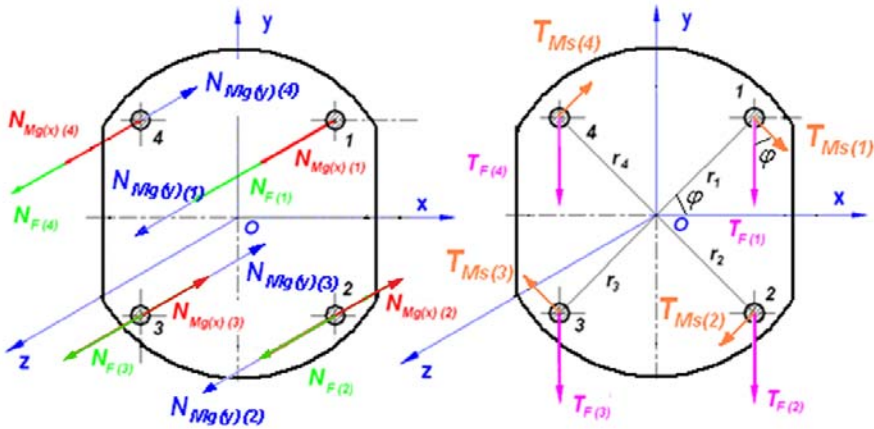
– siła styczna od siły  $T_F$ :

$$T_{F(1,2,3,4)} = \frac{T_F}{z} = -450 [N],$$

– siła styczna od momentu skręcającego  $T_{M_{s(z)}}$ :

$$T_{M_{s(z)}(1,2,3,4)} = |M_s| \cdot \frac{r_{(1,2,3,4)}}{\sum_{i=1}^z r_i} = 35,36 [N],$$

$$r_{(1,2,3,4)} = \sqrt{b^2 + c^2}.$$



Rys. 2.8. Schemat obciążeń poszczególnych śrub wspornika dla Zadania 2  
Źródło: opracowanie własne.

– z rys. widać, że najbardziej obciążona jest śruba: 1.

4. Siły wypadkowe w śrubie 1:

$$T_{wyp(1)} = \sqrt{T_F^2 + T_{Ms}^2 + 2T_F \cdot T_{Ms} \cdot \cos \varphi} = 475,65 [N],$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{c}{r_1}\right) = 45 [^\circ],$$

$$F_{N,Mg(1)} = N_{wyp(1)} = N_{F(1)} + N_{Mg(x)(1)} + N_{Mg(y)(1)} = 1616,02 [N],$$

5. Wykres pracy złącza.

– napięcie resztkowe:

$$Q' = \frac{T_{wyp(1)}}{\mu} = 4756,5 [N],$$

– obciążenie śruby siłą normalną:

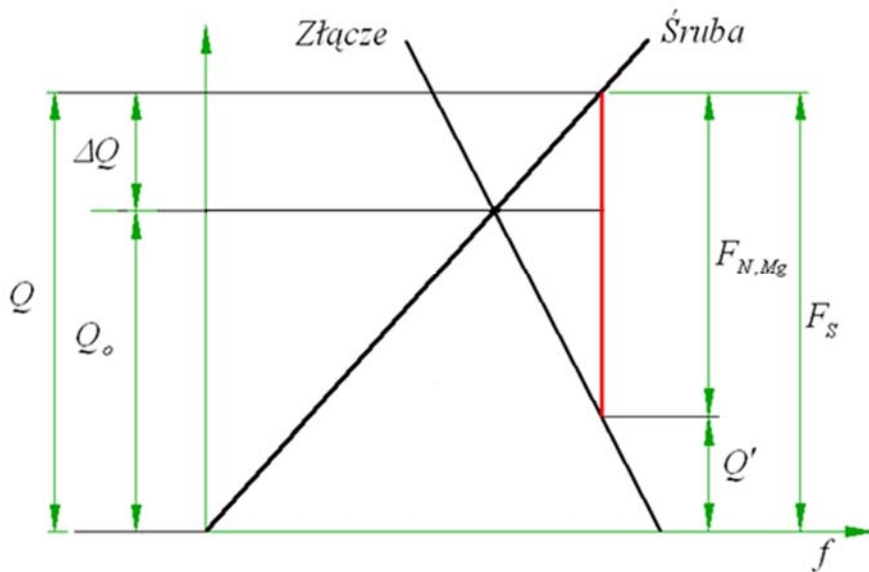
$$F_{N,Mg(1)} = 1616,02 [N],$$

– całkowite obciążenie śruby:

$$F_{S(1)} = F_{N,Mg(1)} + Q' = 6372,52 [N],$$

– napięcie wstępne śruby:

$$Q_0 = Q - \Delta Q = F_S - \left(\frac{\Delta F}{F}\right) \cdot F_{N,Mg} = 5968,52 [N].$$



Rys. 2.9. Wykres pracy złącza śrubowego dla Zadania 2

Źródło: opracowanie własne.

6. Granice wytrzymałości materiału śrub:

$$R_m = 600 \text{ [MPa]},$$

$$R_e = 480 \text{ [MPa]}.$$

7. Naprężenia dopuszczalne:

$$k_r = \frac{R_e}{x_{ewym}} = 192 \text{ [MPa]}.$$

8. Wymagany przekrój śrub:

– współczynnik zabezpieczający przed poluzowaniem śrub 1,25

$$A_r = \frac{1,25 \cdot F_s}{k_r} = 41,49 \text{ [mm}^2\text{]}.$$

9. Dobór śrub (tabela 2.1).

– dobieram śruby M10:

$$A_r = 50,6 \text{ [mm}^2\text{]},$$

$$p_z = 1,5 \text{ [mm]},$$

$$d_2 = 9,026 \text{ [mm]},$$

$$d = 11 \text{ [mm]},$$

$$D_0 = 17 \text{ [mm]},$$

$$\alpha = 30 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

10. Kąt wzniosu linii śrubowej:

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{p_z}{\pi \cdot d_2}\right) = 0,05285 \text{ [rd]},$$

$$\gamma = 3,028057 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

11. Kąt tarcia w gwincie:

– połowa kąta wierzchołkowego gwintu  $\alpha = 30 \text{ [}^\circ\text{]}$

$$\alpha = 0,523599 \text{ [rd]},$$

$$\rho' = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}(\rho)}{\cos(\alpha)}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu_z}{\cos(\alpha)}\right) = 0,114961 \text{ [rd]},$$

$$\rho' = 6,586776 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

12. Moment napinający śrubę:

$$M_{nap} = Q_0 \cdot \left[ \frac{d_2}{2} \cdot \operatorname{tg}(\gamma + \rho') + \mu_3 \cdot \left( \frac{D_0 + d}{4} \right) \right] = 8741 \text{ [Nmm]}.$$

Obliczenia sprawdzające:

1. Moment tarcia w gwincie:

$$M_T = Q_0 \cdot \frac{d_2}{2} \cdot \operatorname{tg}(\gamma + \rho') = 4563,04 \text{ [Nmm]}.$$

2. Pole przekroju rdzenia śruby:

$$A_r = \frac{\pi \cdot d_3^2}{4} = 50,59 \text{ [mm}^2\text{]}.$$

3. Wskaźnik przekroju rdzenia śruby na skręcanie:

$$W_0 = \frac{\pi \cdot d_3^3}{16} = 101,51 \text{ [mm}^3\text{]}.$$

4. Naprężenia rozciągające w śrubie:

$$\sigma_r = \frac{F_S}{A_r} = 125,96 \text{ [MPa]}.$$

5. Naprężenia skręcające w śrubie:

$$\tau = \frac{M_T}{W_0} = 44,95 \text{ [MPa]}.$$

6. Naprężenia zastępcze:

$$\sigma_{zast} = \sqrt{\sigma_r + 3\tau} = 148,08 \text{ [MPa]}.$$

7. Rzeczywisty współczynnik bezpieczeństwa:

$$x_e = \frac{R_e}{\sigma_{zast}} = 3,24,$$

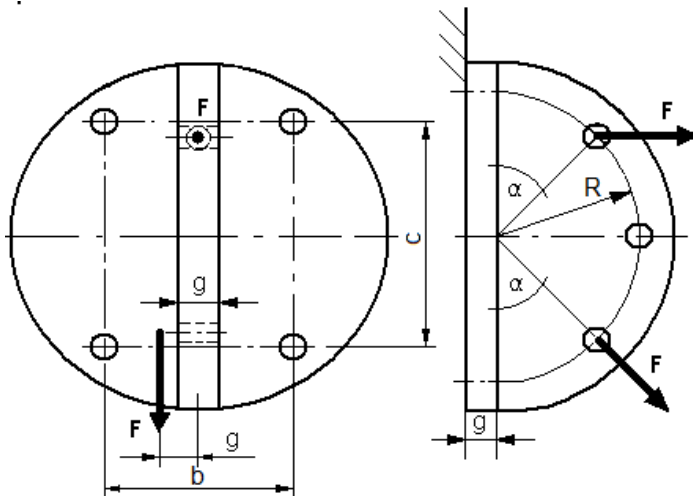
$$x_e = 3,24 \geq x_{wym} = 2,5.$$



## Zadania do samodzielnego rozwiązania:

### Zadanie 1

Dla wspornika na szkicu zaprojektować połączenie śrubowe.



Rys. 2.10. Schemat obciążeń wspornika. Zadania do samodzielnego rozwiązania. Zadanie 1

Źródło: opracowanie własne.

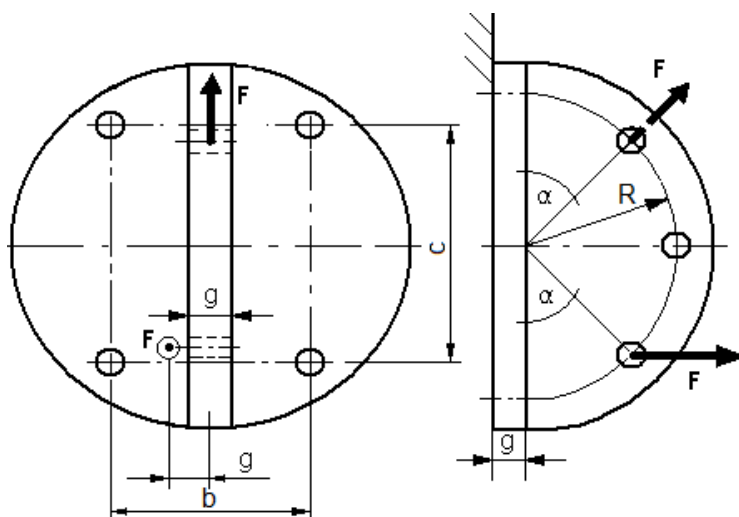
Dane:

- liczba śrub  $z = 4,$
- siła  $F = 4000 [N],$
- podatność złącza  $(\Delta F/F) = 0,2,$
- współczynnik tarcia pomiędzy elementami łączonymi  $\mu_1 = 0,15,$
- współczynnik tarcia w gwincie  $\mu_2 = 0,12,$
- współczynnik tarcia pomiędzy nakrętką a elementem łączonym  $\mu_3 = 0,12,$
- wymagany współczynnik bezpieczeństwa  $x_{wym} = 2,0,$
- wymiary złącza :
  - $b = 70 [mm],$
  - $c = 80 [mm],$
  - $g = 20 [mm],$
  - $R = 45 [mm],$
  - $\alpha = 55 [^\circ].$

*Odpowiedź:* dla śruby o własnościach mechanicznych 5.6 oraz współczynnika zabezpieczającego przed poluzowaniem 1,25 mamy  $A_r \geq 74,9 \text{ mm}^2$  (najbliższa śruba to  $M_{12}$ ,  $A_{rM12} = 76,209 \text{ mm}^2$ ), dla  $d = 14 \text{ mm}$  (rozmiar otworu) i  $D_0 = 19 \text{ mm}$  (rozmiar klucza)  $M_{nap} = 16,5 \text{ Nm}$ .

## Zadanie 2

Dla wspornika na szkicu zaprojektować połączenie śrubowe.



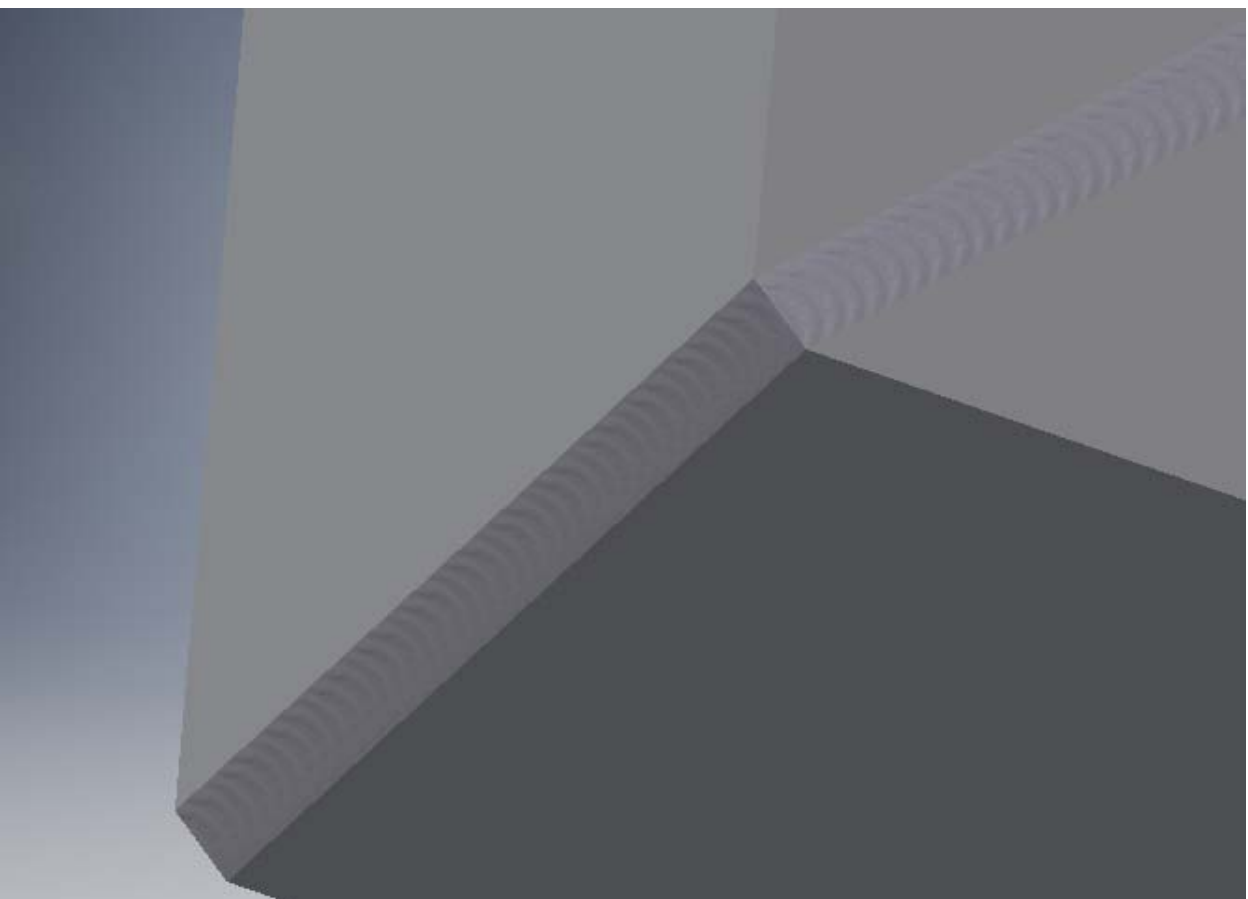
Rys. 2.11. Schemat obciążeń wspornika. Zadania do samodzielnego rozwiązania. Zadanie 2

Źródło: opracowanie własne.

Dane:

- |  |                         |
|--|-------------------------|
| – liczba śrub  | $z = 4,$                |
| – siła   | $F = 6400 [N],$         |
| – podatność złącza   | $(\Delta F/F) = 0,2,$   |
| – współczynnik tarcia pomiędzy elementami łączonymi $\mu_1 = 0,15,$          |                         |
| – współczynnik tarcia w gwincie $\mu_2 = 0,12,$                              |                         |
| – współczynnik tarcia pomiędzy nakrętką a elementem łączonym $\mu_3 = 0,12,$ |                         |
| – wymagany współczynnik bezpieczeństwa $x_{wym} = 1,5,$                      |                         |
| - wymiary złącza :   | $b = 85 [mm],$          |
|  | $c = 95 [mm],$          |
|  | $g = 20 [mm],$          |
|  | $R = 50 [mm],$          |
|  | $\alpha = 35 [^\circ].$ |

*Odpowiedź:* dla śruby o własnościach mechanicznych 5.6 oraz współczynnika zabezpieczającego przed poluzowaniem 1,25 mamy  $A_r \geq 87,53 \text{ mm}^2$  (najbliższa śruba to  $M_{12} \times 1$ ,  $A_{rM_{12} \times 1} = 91,107 \text{ mm}^2$ ) dla  $d = 14 \text{ mm}$  (rozmiar otworu) i  $D_0 = 19 \text{ mm}$  (rozmiar klucza)  $M_{nap} = 26,8 \text{ Nm}$ .



# Rozdział 3

## POŁĄCZENIA SPAWANE

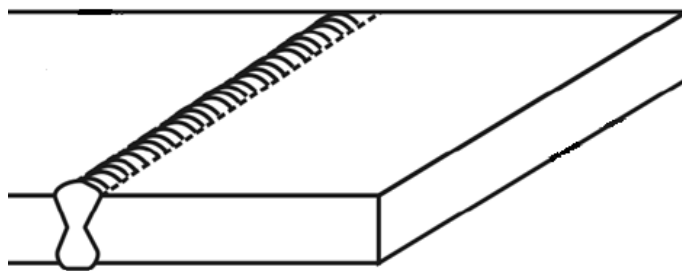
Opracowanie:

treści merytoryczne: dr inż. Andrzej Maciejczyk

zadania: dr inż. Arkadiusz Kądziała, dr inż. Sergiusz Zakrzewki

Obliczenia sprowadzają się do sprawdzenia naprężeń w spoinie

### 3.1. Spoiny czołowe



Rys. 3.1. Przykład spoiny czołowej  
*Źródło: opracowanie własne.*

### Naprężenia zastępcze w spoinach czołowych

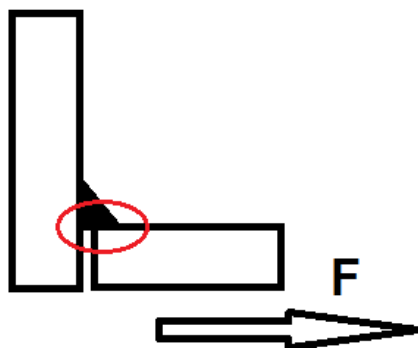
$$\sigma'_z = \sqrt{(\sigma')^2 + \left(\frac{k'_r}{k'_t} * \tau\right)^2} \leq k'_r,$$

gdzie:

$$k'_r = 0,8k_r = 0,8 \frac{R_e}{x_e},$$

$$k'_t = 0,66k_r.$$

### 3.2. Spoiny pachwinowe



Rys. 3.2. Schemat zniszczenia spoiny pachwinowej  
*Źródło: opracowanie własne.*

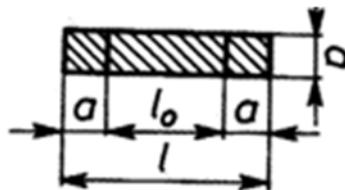
W spoinie pachwinowej występują tylko naprężenia styczne.  
Spoina pachwinowa pracuje tylko na ścinanie.

## Długość obliczeniowa spoiny

Długość obliczeniowa spoiny  $l_0$  – długość całkowita spoiny minus kraterzy na jej początku i końcu.

Rys. 3.3. Schemat do wyznaczania obliczeniowej długości spoiny

Źródło: opracowanie własne.



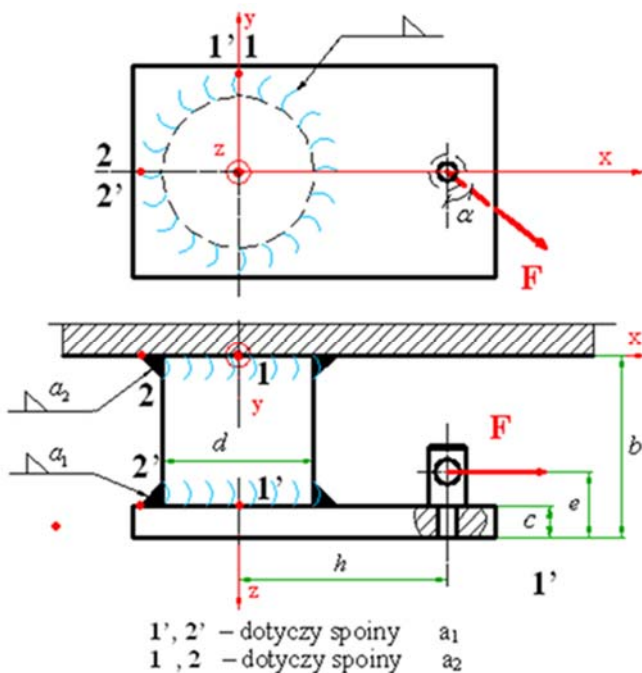
## Naprężenia w spoinach pachwinowych

$$\tau'_z = \sqrt{\tau_x'^2 + \tau_y'^2 + \tau_z'^2} \leq k'_t,$$

$$k'_t = 0,66k_r = 0,66 \frac{R_e}{x_e}.$$

## Zadanie 1

Wyznaczyć naprężenia zastępcze połączeń spawanych przedstawionych na rysunku w punktach 1, 2 i 1', 2'.



Rys. 3.4. Schemat obciążeń pospawanego wspornika dla Zadania 1

Źródło: opracowanie własne.

Dane:

– przekrój spoiny

$$a_1 = a_2 = 6 \text{ [mm]},$$

– siła

$$F = 20000 \text{ [N]},$$

– wymiary złącza :

$$b = 120 \text{ [mm]},$$

$$c = 15 \text{ [mm]},$$

$$d = 80 \text{ [mm]},$$

$$e = 35 \text{ [mm]},$$

$$h = 100 \text{ [mm]},$$

$$\alpha = 30 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

## Rozwiązanie

1. Obciążenie powierzchni styku elementów łączonych:

$$T_x = F \cdot \sin(\alpha) = 10000 \text{ [N]},$$

$$T_y = -F \cdot \cos(\alpha) = -17320,51 \text{ [N]},$$

$$M_{s(z)} = T_y \cdot h = -1732051 \text{ [Nmm]}.$$

Momenty gnące:

a) spoina  $a_1$ :

$$M_{g(x)1} = T_y \cdot (e-c) = -346410,2 \text{ [Nmm]},$$

$$M_{g(y)1} = T_x \cdot (e-c) = -200000 \text{ [Nmm]},$$

b) spoina  $a_2$ :

$$M_{g(x)2} = T_y \cdot (b-e) = 1472243 \text{ [Nmm]},$$

$$M_{g(y)2} = T_x \cdot (b-e) = 850000 \text{ [Nmm]}.$$

2. Geometria spoin.

a) spoina  $a_1$ :

pole pow.:

$$S_1 = \pi \cdot (d + a_1) \cdot a_1 = 1621,062 \text{ [mm]},$$

– oment bezwładności względem osi x i y:

$$J_{x1} = \frac{\pi}{64} \cdot [(d + 2 \cdot a_1)^4 - d^4] = 1505966 \text{ [mm}^4\text{]},$$

$$J_{y1} = \frac{\pi}{64} \cdot [(d + 2 \cdot a_1)^4 - d^4] = 1505966 \text{ [mm}^4\text{]},$$

$$J_{01} = J_{x1} + J_{y1} = 3011933 \text{ [mm}^4\text{]},$$

– wskaźniki wytrzymałości:

$$W_{x1} = \frac{J_{x1}}{\frac{d}{2} + a_1} = 32738,4 \text{ [mm}^3\text{]},$$

$$W_{y1} = \frac{J_{y1}}{\frac{d}{2} + a_1} = 32738,4 \text{ [mm}^3\text{]},$$

$$W_{01} = \frac{J_{01}}{\frac{d}{2} + a_1} = 65476,8 \text{ [mm}^3\text{]},$$

b) spoina  $a_2$ :

pole pow.:

$$S_2 = \pi \cdot (d + a_2) \cdot a_2 = 1621,062 \text{ [mm]},$$

– moment bezwładności względem osi x i y:

$$J_{x2} = \frac{\pi}{64} \cdot [(d + 2 \cdot a_2)^4 - d^4] = 1505966 \text{ [mm}^4\text{]},$$

$$J_{y2} = \frac{\pi}{64} \cdot [(d + 2 \cdot a_2)^4 - d^4] = 1505966 \text{ [mm}^4\text{]},$$

$$J_{02} = J_{x2} + J_{y2} = 3011933 \text{ [mm}^4\text{]},$$

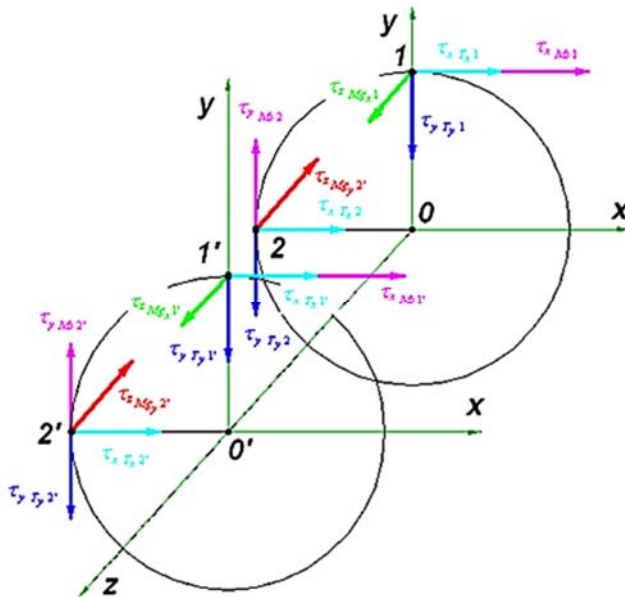
– wskaźniki wytrzymałości:

$$W_{x2} = \frac{J_{x2}}{\frac{d}{2} + a_2} = 32738,4 \text{ [mm}^3\text{]},$$

$$W_{y2} = \frac{J_{y2}}{\frac{d}{2} + a_2} = 32738,4 \text{ [mm}^3\text{]},$$

$$W_{02} = \frac{J_{02}}{\frac{d}{2} + a_2} = 65476,8 \text{ [mm}^3\text{]}.$$

3. Naprężenia:



Rys. 3.5. Naprężenia w spoinach dla Zadania 1

Źródło: opracowanie własne.

a) spoina a<sub>1</sub>:  
punkt 1'

$$\tau_{xT_x1'} = \frac{T_x}{S_1} = 6,168796 \text{ [MPa]},$$

$$\tau_{yT_y1'} = \frac{T_y}{S_1} = 10,68467 \text{ [MPa]},$$

$$\tau_{zMg_{x1}'} = \frac{Mg_{x1}}{W_{x1}} = 10,58116 \text{ [MPa]},$$

$$\tau_{xMs1'} = \frac{M_s}{W_{01}} = 26,45289 \text{ [MPa]}.$$

Naprężenia zastępcze:

$$\tau_{zast1'} = \sqrt{(\tau_{xT_x1'} + \tau_{xMs1'})^2 + \tau_{yT_y1'}^2 + \tau_{zMg_{x1}'}^2} = 35,92071 \text{ [MPa]},$$

punkt 2'

$$\tau_{xT_x2'} = \frac{T_x}{S_1} = 6,168796 \text{ [MPa]},$$

$$\tau_{yT_y2'} = \frac{T_y}{S_1} = 10,68467 \text{ [MPa]},$$



$$\tau_{zMg_{y2}'} = \frac{Mg_{y1}}{W_{y1}} = 6,109034 [MPa],$$

$$\tau_{yMs2'} = \frac{M_s}{W_{01}} = 26,45289 [MPa].$$

Naprężenia zastępcze:

$$\tau_{zast2'} = \sqrt{\tau_{xT_{x2}'}^2 + (\tau_{yMs2'} - \tau_{yT_{y2}'})^2 + \tau_{zMg_{y2}'}^2} = 18,00031 [MPa],$$

a) spoina a<sub>2</sub>  
punkt 1:

$$\tau_{xT_{x1}} = \frac{T_x}{S_2} = 6,168796 [MPa],$$

$$\tau_{yT_{y1}} = \frac{T_y}{S_2} = 10,68467 [MPa],$$

$$\tau_{zMg_{x1}} = \frac{Mg_{x2}}{W_{x2}} = 44,96992 [MPa],$$

$$\tau_{xMs1} = \frac{M_s}{W_{02}} = 26,45289 [MPa].$$

Naprężenia zastępcze:

$$\tau_{zast1} = \sqrt{(\tau_{xT_{x1}} + \tau_{xMs1})^2 + \tau_{yT_{y1}}^2 + \tau_{zMg_{x1}}^2} = 56,57411 [MPa],$$

punkt 2:

$$\tau_{xT_{x2}} = \frac{T_x}{S_2} = 6,168796 [MPa],$$

$$\tau_{yT_{y2}} = \frac{T_y}{S_2} = 10,68467 [MPa],$$

$$\tau_{zMg_{y2}} = \frac{Mg_{y2}}{W_{y2}} = 25,96339 [MPa],$$

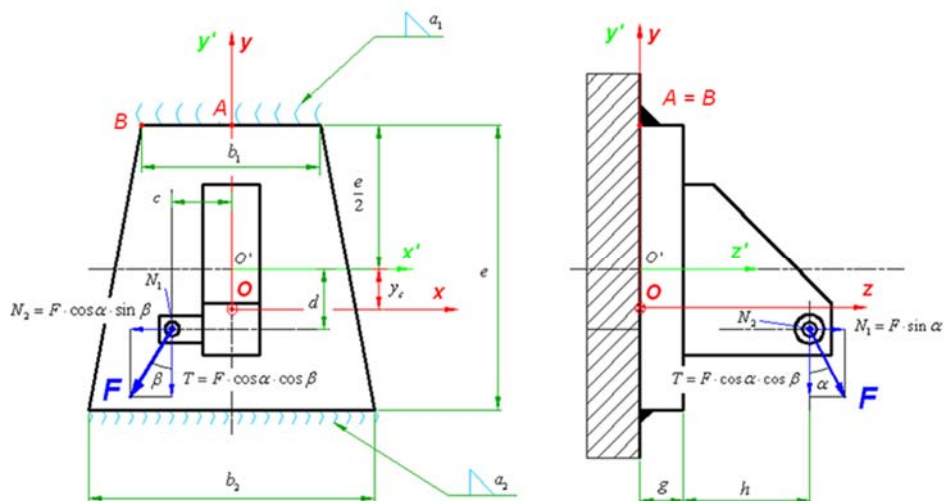
$$\tau_{yMs2} = \frac{M_s}{W_{02}} = 26,45289 [MPa].$$

Naprężenia zastępcze:

$$\tau_{zast2} = \sqrt{\tau_{xT_{x2}}^2 + (\tau_{yMs2} - \tau_{yT_{y2}})^2 + \tau_{zMg_{y2}}^2} = 30,99659 [MPa].$$

## Zadanie 2

Wyznaczyć naprężenia wypadkowe w spoinie w p. B wspornika przedstawionego na szkicu.



Rys. 3.6. Schemat obciążenia przyspawanego wspornika dla Zadania 2  
*Źródło: opracowanie własne.*

Dane:

– przekrój spoiny

– siła

– wymiary złącza:

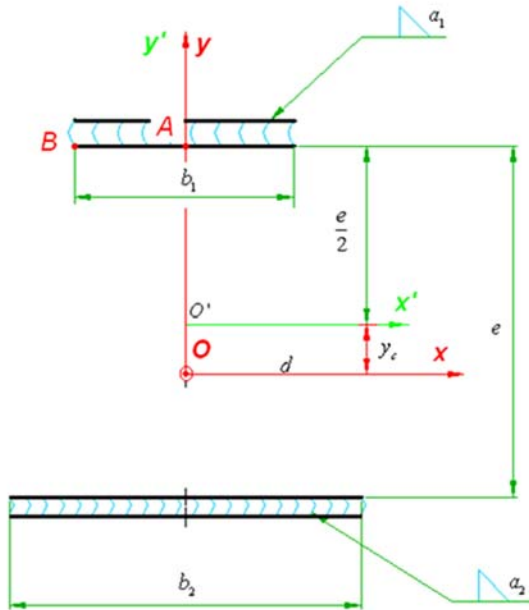
- $a_1 = 8 \text{ [mm]}$ ,
- $a_2 = 6 \text{ [mm]}$ ,
- $F = 30000 \text{ [N]}$ ,
- $b_1 = 80 \text{ [mm]}$ ,
- $b_2 = 120 \text{ [mm]}$ ,
- $c = 40 \text{ [mm]}$ ,
- $d = 60 \text{ [mm]}$ ,
- $e = 120 \text{ [mm]}$ ,
- $g = 10 \text{ [mm]}$ ,
- $h = 80 \text{ [mm]}$ ,
- $\alpha = 30 \text{ [}^\circ\text{]}$ ,
- $\beta = 60 \text{ [}^\circ\text{]}$ .

## Rozwiązanie

1. Położenie środka ciężkości spoin O:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{a_1 \cdot b_1(0) + a_2 \cdot b_2(0)}{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2} = 0 \text{ [mm]},$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot \left(\frac{e}{2} + \frac{a_1}{2}\right) + a_2 \cdot b_2 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{e}{2} + \frac{a_2}{2}\right)}{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2} = -3,2353 \text{ [mm]}.$$



Rys. 3.7. Położenie środka ciężkości spoiny

Źródło: opracowanie własne.

## 2. Obciążenie zewnętrzne spoin:

$$N_1 = F \cdot \sin(\alpha) = 15000 \text{ [N]},$$

$$N_2 = F \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) = 22500 \text{ [N]},$$

$$T = F \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = 12990,38 \text{ [N]},$$

$$M_{g(x)} = -N_1 \cdot (d - |y_c|) + T \cdot (g + h) = 317663,71 \text{ [Nmm]},$$

$$M_{g(y)} = -N_2 \cdot (g + h) + N_1 \cdot c = -1425000 \text{ [Nmm]},$$

$$M_s = M_z = -N_2 \cdot d + T \cdot c = -830384,76 \text{ [Nmm]}.$$

## 3. Geometria spoin:

– pole pow.:

$$S_1 = a_1 \cdot b_1 = 640 \text{ [mm]},$$

$$S_2 = a_2 \cdot b_2 = 720 \text{ [mm]},$$

$$S = S_1 + S_2 = 1360 \text{ [mm]}.$$

– moment bezwładności względem osi x:

$$J_{x1} = \frac{b_1 \cdot a_1^3}{12} + S_1 \cdot \left( \frac{e}{2} - y_c + \frac{a_1}{2} \right)^2 = 2896587,59 \text{ [mm}^4\text{]},$$

$$J_{x2} = \frac{b_2 \cdot a_2^3}{12} + S_2 \cdot \left( \frac{e}{2} + y_c + \frac{a_2}{2} \right)^2 = 2573870,45 \text{ [mm}^4\text{]},$$

$$J_x = J_{x1} + J_{x2} = 5470458,04 \text{ [mm}^4\text{]}.$$

– wskaźnik wytrzymałości na zginanie względem osi x w p. B:

$$W_{xB} = \frac{J_x}{\frac{e}{2} - y_c} = 86509,57 \text{ [mm}^3\text{]},$$

– wskaźnik wytrzymałości na zginanie względem osi x w p. A:

$$W_{xA} = W_{xB} = 86509,57 \text{ [mm}^3\text{]},$$

– moment bezwładności względem osi y:

$$J_y = \frac{a_1 \cdot b_1^3}{12} + \frac{a_2 \cdot b_2^3}{12} = 1205333,333 \text{ [mm}^4\text{]},$$

– wskaźnik wytrzymałości na zginanie względem osi y w p. B:

$$W_{yB} = \frac{J_y}{\frac{b_1}{2}} = 30133,33333 \text{ [mm}^3\text{]},$$

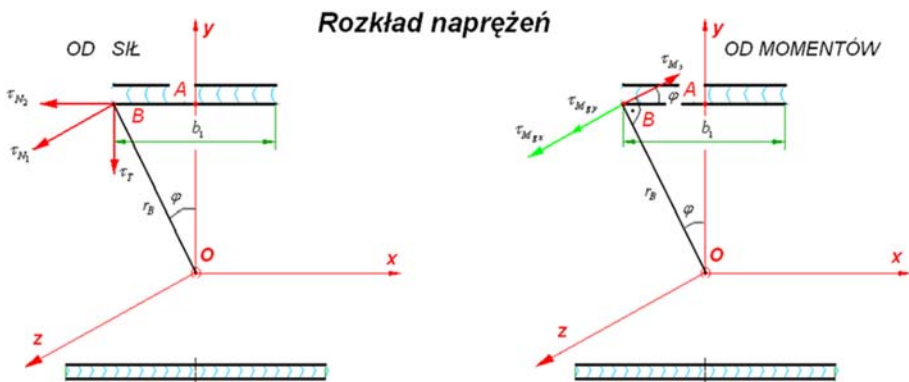
– moment biegunowy bezwładności:

$$J_0 = J_x + J_y = 6675791,373 \text{ [mm}^4\text{]},$$

– wskaźnik wytrzymałości na skręcanie w p. B:

$$W_{0B} = \frac{J_0}{r_B} = \frac{J_0}{\sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2} + y_c\right)^2}} = 89219,352 \text{ [mm}^3\text{]}.$$

4. Naprężenia w p. B spoiny:



Rys. 3.8. Rozkład naprężeń w pkt. B spoiny

Źródło: opracowanie własne.

– od sił:

$$\tau_{BN_1} = \frac{N_1}{S} = 11,03 \text{ [MPa]},$$

$$\tau_{BN_2} = \frac{N_2}{S} = 16,54 \text{ [MPa]},$$

$$\tau_{BT} = \frac{T}{S} = 9,55 \text{ [MPa]}$$

– od momentów:

$$\tau_{BM_{gx}} = \frac{M_{g(x)}}{W_{xB}} = 3,67 \text{ [MPa]},$$

$$\tau_{BM_{gy}} = \frac{M_{g(y)}}{W_{yB}} = 47,29 \text{ [MPa]},$$

$$\tau_{BM_s} = \frac{M_s}{W_{oB}} = 9,31 \text{ [MPa]}.$$

Naprężenia wypadkowe w punkcie B:

– wyznaczam wartość kąta:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\frac{e}{2} + |y_c|}{\frac{b_1}{2}}\right) = 57,68 \text{ [}^\circ\text{]},$$

– naprężenia w kierunku osi x:

$$\tau_{Bx} = -\tau_{BN_2} + \tau_{BM_s} \cdot \cos \varphi = -11,57 \text{ [MPa]},$$

– naprężenia w kierunku osi y:

$$\tau_{By} = -\tau_{BT} + \tau_{BM_s} \cdot \sin \varphi = -17,42 \text{ [MPa]},$$

– naprężenia w kierunku osi z:

$$\tau_{Bz} = \tau_{BN_1} + \tau_{BM_{g(x)}} + \tau_{BM_{g(y)}} = 61,99 \text{ [MPa]},$$

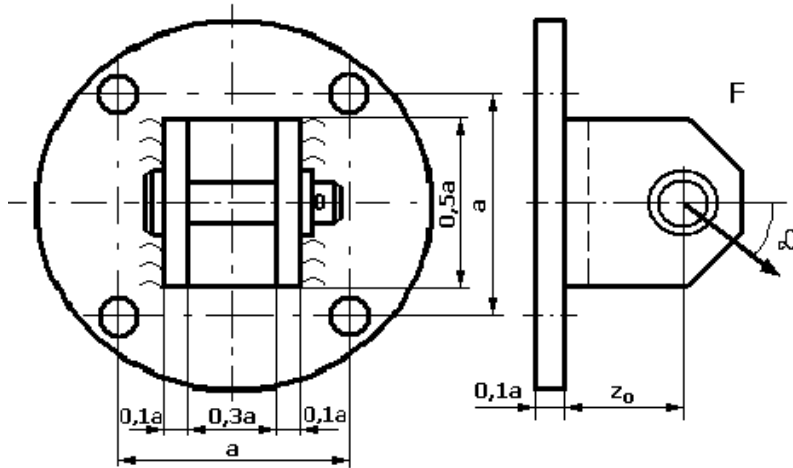
– naprężenia wypadkowe w punkcie B:

$$\tau_{Bwyp} = \sqrt{\tau_{Bx}^2 + \tau_{By}^2 + \tau_{Bz}^2} = 65,42 \text{ [MPa]}$$

## Zadania do samodzielnego rozwiązania

### Zadanie 1

Dla wspornika na szkicu sprawdzić wytrzymałość spoiny pachwinowej zastosowanego połączenia spawanego.



Rys. 3.9. Szkic obciążeń spoiny. Zadania do samodzielnego rozwiązania. Zadanie 1

Źródło: opracowanie własne.

Dane:

– materiał złącza

S235,

– grubość spoiny

$a' = 6 [mm]$ ,

– siła

$F = 1500 [N]$ ,

– wymagany współczynnik bezpieczeństwa

$x_{wym} = 2,5$ ,

– wymiary złącza :

$a = 90 [mm]$ ,

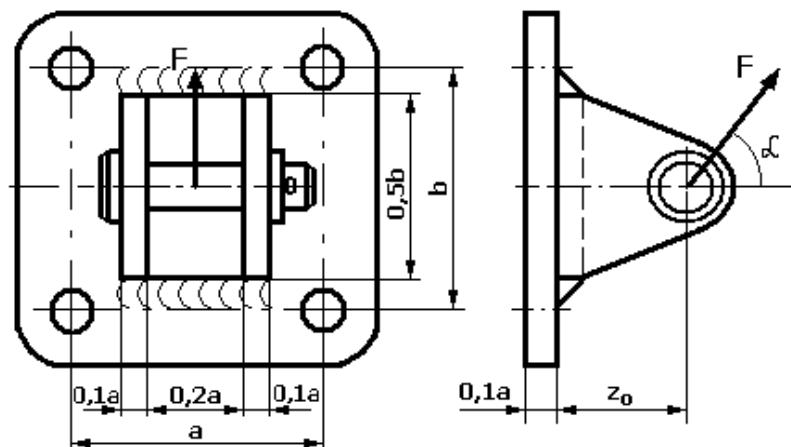
$z_0 = 90 [mm]$ ,

$A = 50 [^\circ]$ .

*Odpowiedź:* naprężenia dopuszczalne wynoszą  $\tau_{dop} \leq 62,04 [MPa]$ , naprężenia zastępcze  $\tau_{wyp} \leq 56,19 [MPa]$ , rzeczywisty współczynnik bezpieczeństwa  $x_{erz} = 2,76$ .

## Zadanie 2

Dla wspornika na szkicu sprawdzić wytrzymałość spoiny pachwinowej zastosowanego połączenia spawanego.



Rys. 3.10. Szkic obciążeń spoiny. Zadania do samodzielnego rozwiązania. Zadanie 2  
*Źródło: opracowanie własne.*

Dane:

- materiał złącza
- grubość spoiny
- siła
- wymagany współczynnik bezpieczeństwa
- wymiary złącza :

S235,

$a' = 5$  [mm],

$F = 3500$  [N],

$x_{wym} = 2,5$ ,

$a = 80$  [mm],

$b = 120$  [mm],

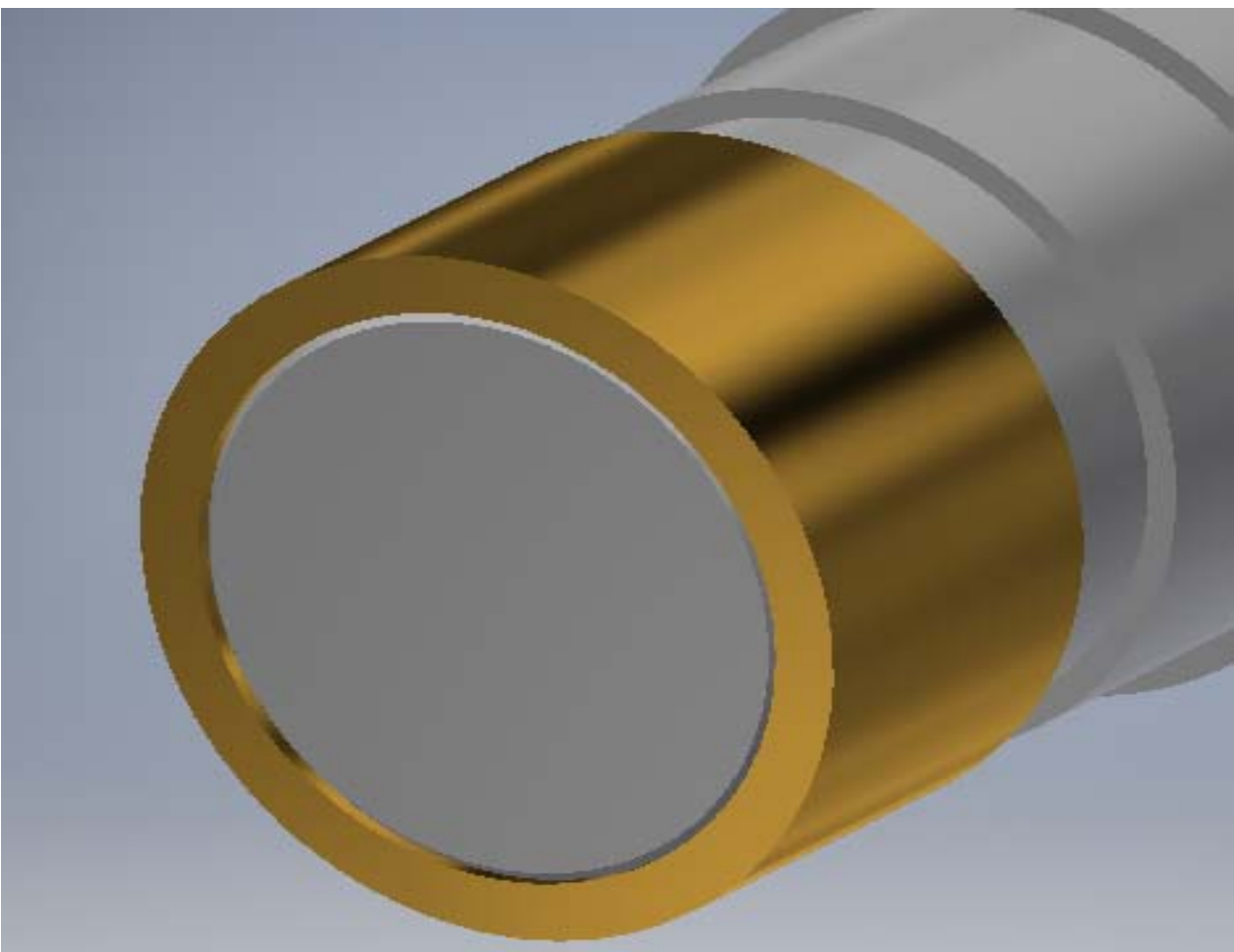
$z_0 = 90$  [mm],

$\alpha = 30$  [°].

*Odpowiedź:* naprężenia dopuszczalne wynoszą  $\tau_{dop} \leq 62,04$  [MPa], naprężenia zastępcze  $\tau_{wyp} \leq 58,29$  [MPa], rzeczywisty współczynnik bezpieczeństwa  $x_{erz} = 2,66$ .







## **Rozdział 4**

### **POŁĄCZENIA SKURCZOWE I WCISKOWE (CIERNE)**

Opracowanie:

dr hab. inż. Przemysław Kubiak

Połączeniem wciskowym nazywa się połączenie cierne dwóch elementów o gładkiej walcowej lub stożkowej powierzchni styku, oparte na odkształceniach sprężystych.

Rozkład naprężeń wyznaczany jest na podstawie zadania Lamego, przy następujących założeniach:

1. Czop i oprawa mają postać tulei o niezmiennym przekroju pierścieniowym.
2. Rozkład nacisków i sił tarcia w polu styku jest równomierny.
3. Odkształcenia są czysto sprężyste.
4. Naprężenia osiowe są pomijalnie małe.

## Podstawowe zależności

### Obciążalność złącza:

$$F = \sqrt{F_W^2 + F_M^2} \leq T = \mu_o p_{wym} A,$$

gdzie:  $F_W$  – siła wzdłużna,

$F_M$  – siła obwodowa w postaci:

$$F_M = \frac{2M_S}{d},$$

$\mu_o$  – obliczeniowy współczynnik tarcia,

$p_{wym}$  – wymagany nacisk w polu styku (ze względu na przeniesienie obciążenia),

$A$  – powierzchnia styku, w postaci:

$$A = \pi dl.$$

### Podatność styku złącza:

$$\frac{\varepsilon}{p} = \frac{1000}{E_1} \left( \frac{\sigma_1}{p} - \nu_1 \right) + \frac{1000}{E_2} \left( \frac{\sigma_2}{p} + \nu_2 \right) = const \left[ \frac{\%_0}{MPa} \right].$$

### Stosunek naprężeń obwodowych do promieniowych:

$$\frac{\sigma_1}{p} = \frac{1+x_1^2}{1-x_1^2},$$

$$\frac{\sigma_2}{p} = \frac{1+x_2^2}{1-x_2^2},$$

### Współczynnik wydrążenia:

$$x_1 = \frac{d_{w1}}{d_{z1}},$$

$$x_2 = \frac{d_{w2}}{d_{z2}},$$

gdzie:  $\nu$  – liczba Poissona,  
 $E$  – moduł sprężystości podłużnej (moduł Younga).

**Wcisk względny wymagany ze wzgl. na obciążenie:**

$$\varepsilon_{wym} = \frac{w_{wym}}{d} = p_{wym} * \frac{\varepsilon}{p} [\%],$$

gdzie:  $w_{wym}$  – wymagany wcisk bezwzględny [ $\mu m$ ].

**Wcisk względny dopuszczalny ze względu na wytrzymałość elementów:**

$$\varepsilon_{dop} \leq p_{dop} * \frac{\varepsilon}{p} [\%],$$

gdzie:  $p_{dop}$  – mniejsza wartość z nacisków dopuszczalnych obliczonych z warunku wytrzymałościowego czopa i oprawy.

**Wcisk względny wymagany ze względu na obciążenie:**

$$\varepsilon_{min} = \frac{w_{min}}{d} \geq \varepsilon_{wym} + \delta_{Ra} + |\delta_T|_{min} + \delta_z.$$

**Wcisk względny maksymalny ze względu na wytrzymałość:**

$$\varepsilon_{max} = \frac{w_{max}}{d} \leq \varepsilon_{dop} - |\delta_T|_{max} - \delta_z.$$

**Poprawka wcisku względnego na wygładzenie chropowatości:**

$$\delta_{Ra} = \frac{6}{d} (R_{a1} + R_{a2}) [\%],$$

gdzie:  $R_a$  – parametr chropowatości.

**Zmiana wcisku względnego spowodowana odkształceniami cieplnymi:**

$$\delta_T = (\alpha_1 - \alpha_2)(T - T_M) * 1000 [\%],$$

gdzie:  $\alpha$  – współczynnik rozszerzalności cieplnej,

$T$  – temperatura pracy złącza °C,

$T_M$  – temperatura pomiarów (montażu) złącza °C.

Zmianę wcisku  $\delta_T$  uwzględnia się we wzorach:

dla  $\varepsilon_{min}$ ,            gdy  $\delta_T < 0$         – wcisk maleje,

dla  $\varepsilon_{max}$ ,            gdy  $\delta_T > 0$         – wcisk rośnie.

$\delta_z$  – zmiana wcisku spowodowana oddziaływaniem sił zewnętrznych na złącze (np. odśrodkowej, ciśnienia itp.), uwzględnia się we wzorach:

dla  $\varepsilon_{min}$ ,            gdy                    wcisk maleje,

dla  $\varepsilon_{max}$ ,            gdy                    wcisk rośnie.

### Odształcenie względne:

– powierzchni styku czopa:

$$\varepsilon_1 = \frac{1000}{E_1}(\sigma_1 - \nu_1 p) = p \left( \frac{\varepsilon_1}{p} \right) [\text{‰}],$$

– powierzchni styku oprawy:

$$\varepsilon_2 = \frac{1000}{E_2}(\sigma_2 + \nu_2 p) = p \left( \frac{\varepsilon_2}{p} \right) [\text{‰}],$$

– powierzchni swobodnej czopa:

$$\varepsilon_1' = \frac{1000\sigma_1'}{E_1} = \left( \frac{\varepsilon_1'}{p} \right) p = \left( \frac{2}{1-x_1^2} \frac{1000}{E_1} \right) p = \left( \frac{\varepsilon_1'}{p} \right) p \frac{1}{(\varepsilon/p)},$$

– powierzchni swobodnej oprawy:

$$\varepsilon_2' = \frac{1000\sigma_2'}{E_2} = \left( \frac{\varepsilon_2'}{p} \right) p = \left( \frac{2x_2^2}{1-x_2^2} \frac{1000}{E_2} \right) p = \left( \frac{\varepsilon_2'}{p} \right) \varepsilon \frac{1}{(\varepsilon/p)},$$

gdzie:  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  wcisk względny.

$$\varepsilon_1' = \frac{\Delta d_{w1}}{d_{w1}} * 1000 [\text{‰}],$$

$$\varepsilon_2' = \frac{\Delta d_{w2}}{d_{w2}} * 1000 [\text{‰}].$$

### Naprężenia obwodowe na powierzchniach swobodnych:

– naprężenia obwodowe na powierzchni wewnętrznej czopa:

$$\sigma_1' = \sigma_1 + p = \left( \frac{\sigma_1}{p} + 1 \right) p,$$

– naprężenia obwodowe na powierzchni zewnętrznej oprawy:

$$\sigma_2' = \sigma_2 - p = \left( \frac{\sigma_2}{p} - 1 \right) p.$$

### Odształcenie bezwzględne powierzchni swobodnych:

– zmniejszenie średnicy wewnętrznej czopa:

$$\Delta d_{w1} = \frac{\varepsilon_1' * d_{w1}}{1000},$$

– zwiększenie średnicy zewnętrznej oprawy:

$$\Delta d_{w2} = \frac{\varepsilon_2' * d_{w2}}{1000}.$$

**Siła potrzebna do wtłoczenia  $F_w$  lub rozłączenia  $F_r$  połączenia wciskowego:**

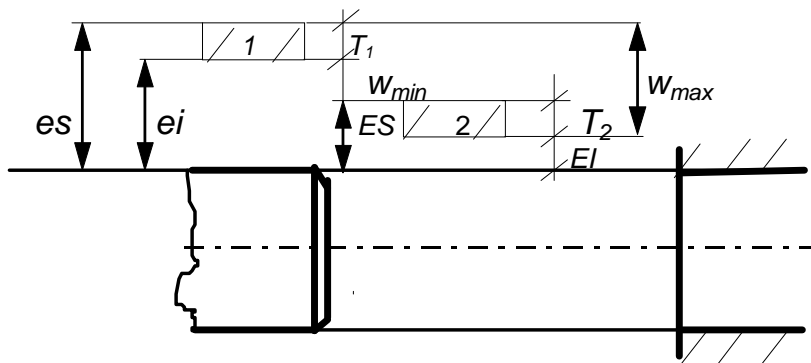
$$F_{w(r)} \leq \pi * d * l * p_{max} * \mu_{w(r)},$$

gdzie:  $p_{max}$  – największy nacisk w polu styku uzyskiwany przy dobranym pasowaniu.

**Wymagana temperatura ogrzania oprawy (oziebnienia czopa):**

$$T_o = \xi \frac{\varepsilon_{max}}{1000\alpha} + T_M \text{ } ^\circ\text{C},$$

gdzie:  $\xi = 1,25$  – współczynnik uwzględniający luz montażowy,  
 $\varepsilon_{max}$  – największy wcisk względny uzyskiwany przy dobranym pasowaniu.



Rys. 4.1. Wcisk max. i min. Złącza

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.1. Wartości współczynników tarcia [wg 4]

Sposób montażu złącza		Wtlaczane			Skurczowe	
materiały elementów łączonych	zastosowanie smaru	montaż $\mu_w$	demontaż $\mu_r$	obliczeniowe $\mu_o$	demontaż $\mu_r$	obliczeniowe $\mu_o$
stal – stal, staliwo	olej maszyn.	0,06÷0,22	0,08÷0,20	0,08	--	--
-----,-----	na sucho	--	--	--	0,35÷0,40	0,14
stal – żeliwo	--	0,06÷0,14	0,09÷0,17	0,08	0,13÷0,18	0,08
stal – stopy miedzi	na sucho	0,05÷0,10	0,04÷0,10	0,05	0,17÷0,25	0,06
stal – stopy lekkie	na sucho	0,02÷0,08	0,03÷0,09	0,04	0,10÷0,15	0,05
stal – tworzywa sztuczne	na sucho	0,54	0,33	0,30	--	--

Tabela 4.2. Charakterystyczne cechy różnych materiałów [wg 4]

Material	$\alpha$ [1/°C] przy ogrzewaniu	$\alpha$ [1/°C] przy oziębianiu	$\nu$	E [MPa]	$R_m/R_c$
Stal, staliwo	$11 \cdot 10^{-6}$	$8,5 \cdot 10^{-6}$	0,30	$(200 \div 215) \cdot 10^3$	
Żeliwo szare	$10 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-6}$	0,25	$(75 \div 105) \cdot 10^3$	$\approx 1/3$
Żeliwo ciągliwe	$10 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-6}$	0,25	$(75 \div 105) \cdot 10^3$	
Stopy miedzi	$(17 \div 18) \cdot 10^{-6}$	$(15 \div 16) \cdot 10^{-6}$	0,35	$(80 \div 90) \cdot 10^3$	
Stopy lekkie	$(23 \div 26) \cdot 10^{-6}$	$(18 \div 21) \cdot 10^{-6}$	0,35	$(40 \div 80) \cdot 10^3$	
Tworzywa sztuczne	$(40 \div 70) \cdot 10^{-6}$	-	-	$(4 \div 16) \cdot 10^3$	

Tabela 4.3. Zależności określające naciski dopuszczalne w polu styku [wg 4]

Materiał	Zależność na nacisk dopuszczalny		
	CZOP		OPRAWA
	pełny	drażony	
ciągliwy	$p_{dop} \leq R_e 1$	$p_{dop} \leq 0,58 R_e 1 (1 - x_1^2)$	$p_{dop} \leq 0,58 R_e 2 (1 - x_2^2)$
kruchy	$p_{dop} \leq \frac{R_c 1}{x}$	$p_{dop} \leq 0,5 \frac{R_c 1}{x} (1 - x_1^2)$	$p_{dop} \leq \frac{R_m 2}{x} \frac{1}{\frac{\sigma_2}{p} + \frac{R_m 2}{R_c 2}}$

Tabela 4.4. Otworów i wałków (w  $\mu\text{m}$ ) [wg PN EN 20286-1:1996 ISO 286-1 Układ tolerancji i pasowań ISO. Tolerancje Podstawy tolerancji, odchyłek i pasowań; PN EN 20286-2:1996 ISO 286-2 Układ tolerancji i pasowań ISO. Tablice klas tolerancji normalnych oraz odchyłek granicznych otworów i wałków]

Klasa dokładności	Obszary wymiarów nominalnych, mm												
	po-nad 0 do 3	po-nad 3 do 6	po-nad 6 do 10	po-nad 10 do 18	po-nad 18 do 30	po-nad 30 do 50	po-nad 50 do 80	po-nad 80 do 120	po-nad 120 do 180	po-nad 180 do 250	po-nad 250 do 315	po-nad 315 do 400	po-nad 400 do 500
01	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,6	0,8	1	1,2	2	2,5	3	4
0	0,5	0,6	0,6	0,8	1	1	1,2	1,5	2	3	4	5	6
1	0,8	1	1	1,2	1,5	1,5	2	2,5	3,5	4,5	6	7	8
2	1,2	1,5	1,5	2	2,5	2,5	3	4	5	7	8	9	10
3	2	2,5	2,5	3	4	4	5	6	8	10	12	13	15
4	3	4	4	5	6	7	8	10	12	14	16	18	20
5	4	5	6	8	9	11	13	15	18	20	23	25	27
6	6	8	9	11	13	16	19	22	25	29	32	36	40
7	10	12	15	18	21	25	30	35	40	46	52	57	63
8	14	18	22	27	33	39	46	54	63	72	81	89	97
9	25	30	36	43	52	62	74	87	100	115	130	140	155

10	40	48	58	70	84	100	120	140	160	185	210	230	250
11	60	75	90	110	130	160	190	220	250	290	320	360	400
12	100	120	150	180	210	250	300	350	400	460	520	570	630
13	140	180	220	270	330	390	460	540	610	720	810	890	970
14	250	300	360	430	520	620	740	870	1000	1150	1300	1400	1550
15	400	480	580	700	840	1000	1200	1400	1600	1850	2100	2300	2500
16	600	750	900	1100	1300	1600	1900	2200	2500	2900	3200	3600	4000
<b>Dolne odchyłki wałków ei (w <math>\mu\text{m}</math>)</b>													
Obszary wymiarów nominalnych, mm													
Pole tolerancji	po-nad 0	po-nad 3	po-nad 6	po-nad 10	po-nad 18	po-nad 24	po-nad 30	po-nad 40	po-nad 50	po-nad 65	po-nad 80	po-nad 100	po-nad 120
	do 3	do 6	do 10	do 18	do 24	do 30	do 40	do 50	do 65	do 80	do 100	do 120	do 140
m	2	4	6	7	8	8	9	9	11	11	13	13	15
n	4	8	10	12	15	15	17	17	20	20	23	23	27
p	6	12	15	18	22	22	26	26	32	32	37	37	43
r	10	15	19	23	28	28	34	34	41	43	51	54	63
s	14	19	23	28	35	35	43	43	53	59	71	79	92
t						41	48	54	66	75	91	104	122
u	18	18	28	33	41	48	60	70	87	102	124	144	170

Tabela 4.5. Własności żeliw [wg PN-EN 1561:2000]

Żeliwo szare

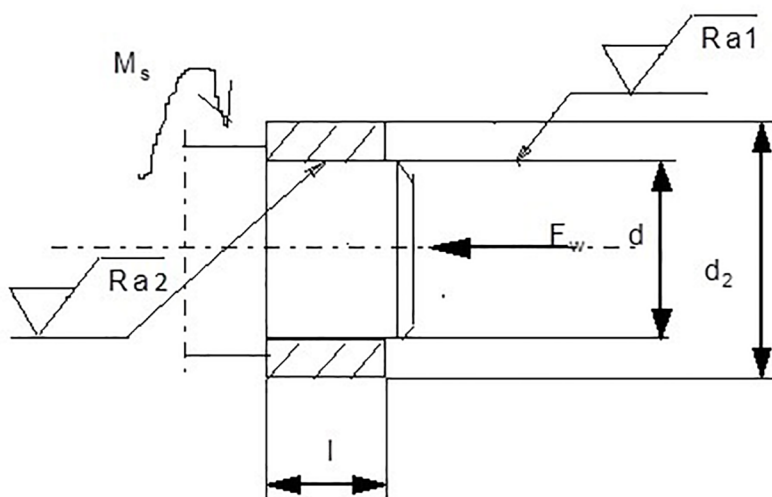
Oznaczenie	R <sub>m</sub> [MPa]	R <sub>c</sub> [MPa]	E [MPa]	$\alpha$ [1/K]	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$\nu$
EN-GJL-100	100-200	-	-	-	7,1	-
EN-GJL-150	150-250	600	78000-103000	11,7E-6	7,1	0,26
EN-GJL-200	200-300	720	88000-113000	11,7E-6	7,15	0,26
EN-GJL-250	250-350	840	90000-110000	11,7E-6	7,1	0,26
EN-GJL-350	350-450	1080	108000-137000	11,7E-6	7,1	0,26

Żeliwo sferoidalne [wg PN-EN 1563:2000]

Oznaczenie	R <sub>m</sub> [MPa]	R <sub>c</sub> [MPa]	R <sub>p02</sub>	E [MPa]	$\alpha$ [1/K]	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$\nu$
EN-GJS-350-22	≥ 350	315	≥ 220	169 000	12,5E-6	7,1	0,26
EN-GJS-400-15	≥ 400	-	≥ 250	169 000	12,5E-6	7,1	0,275
EN-GJS-400-18	≥ 400	700	≥ 250	169 000	12,5E-6	7,1	0,275
EN-GJS-450-10	≥ 450	700	≥ 310	169 000	12,5E-6	7,1	0,275
EN-GJS-500-7	≥ 500	800	≥ 320	169 000	12,5E-6	7,1	0,275
EN-GJS-600-3	≥ 600	800	≥ 320	174 000	12,5E-6	7,2	0,275
EN-GJS-700-2	≥ 700	1000	≥ 420	176 000	12,5E-6	7,2	0,275
EN-GJS-800-2	≥ 800	1150	≥ 480	176 000	12,5E-6	7,2	0,275
EN-GJS-900-2	≥ 900	1150	≥ 600	176 000	12,5E-6	7,2	0,275

## Zadanie 1

Zaprojektować połączenie ciernie (wciskowe) włączane czopa z oprawą (piastą).



Rys. 4.2. Schemat połączenia ciernego do Zadania 1

Źródło: opracowanie własne.

### Parametry zadane

	oznacz.	czop 1	Piasta 2	
średnica nominalna połączenia	$d$	70	70	$mm$
obciążenie połączenia				
moment skręcający	$M_s$	30		$Nm$
siła wzdłużna	$F_w$	400		$N$
temp. pracy łącz.	$T_{min}$	-10	-10	$^{\circ}$
	$T_{max}$	40	40	$^{\circ}$
temp. montażu (pomiaru)	$T_m$	20	20	$^{\circ}$

### Parametry zakładane:

		czop	piasta	
Długość połączenia $l \leq 1,2 * d$	$l$	80		
Średnica zewnętrzna (dla piasty $d_z \leq 2 * d$ )	$d_z$	70	130	$mm$
Średnica wewnętrzna	$d_w$	0	70	$mm$
Materiał	<i>mat.</i>	MSt6 E335	250 EN-GJL-250	
Granica plastyczności	$R_{e min}$	340	125	$MPa$
Granica wytrzymałości doraźnej na rozciąganie	$R_{m min}$	600	250	$MPa$
Granica wytrzymałości doraźnej na ściskanie	$R_c$	600	800	$MPa$



Liczba Poissona	$\nu$	0,3	0,25	
Współczynnik rozszerz. liniowej przy ogrzewaniu (dla $T > T_m$ )	$\alpha$	1,10E-05	1,00E-05	1/°C
Współczynnik rozszerz. liniowej przy oziębianiu (dla $T < T_m$ )	$\alpha$	8,5E-06	8,00E-06	1/°C
Chropowatość powierzchni współpracujących	$R_a$	0,63	1,25	
Współczynnik tarcia obliczeniowy	$\mu_o$	0,08		
Współczynnik tarcia przy włączaniu	$\mu_{w\ max}$	0,14		
Współczynnik tarcia przy rozłączaniu	$\mu_{r\ min}$	0,09		
Współczynnik bezpieczeństwa dla materiału kruchego	$X$	2		

## Rozwiązanie

1. Współczynnik wydrążenia:

$$x_1 = \left(\frac{d_w}{d_z}\right)_1 = 0,$$

$$x_2 = \left(\frac{d_w}{d_z}\right)_2 = 0,538.$$

2. Stosunek naprężeń obwodowych do promieniowych:

$$\frac{\sigma_1}{p} = \frac{1+x_1^2}{1-x_1^2} = 1,$$

$$\frac{\sigma_2}{p} = \frac{1+x_2^2}{1-x_2^2} = 1,815.$$

3. Podatność styku złącza:

$$\frac{\varepsilon}{p} = \frac{1000}{E_1} \left(\frac{\sigma_1}{p} - \nu_1\right) + \frac{1000}{E_2} \left(\frac{\sigma_2}{p} + \nu_1\right) = 0,02398 \left[\frac{\%}{MPa}\right].$$

4. Naciski na powierzchni styku wymagane ze względu na obciążenia:

$$p_{wym} \geq \frac{\sqrt{F_w^2 + \left(\frac{2 \cdot 1000 M_s}{d}\right)^2}}{\mu_o \pi d l} = 0,67 [MPa].$$

5. Naciski dopuszczalne w polu styku dla czopa pełnego ciągłego:

$$p_{dop} \leq R_{e1} = 340 [MPa].$$

6. Naciski dopuszczalne w polu styku dla oprawy z mat. Kruchego:

$$p_{dop} \leq \frac{R_{m2}}{x} \frac{1}{\frac{\sigma_2}{p} + \frac{R_{m2}}{R_{c2}}} = 58,75 [MPa].$$

7. Naciski dopuszczalne w polu styku przyjęte dla słabszego elementu:

$$p_{dop} = 58,75 [MPa].$$

8. Wcisk względny wymagany ze względu na obciążenie:

$$\varepsilon_{wym} = p_{wym} * \frac{\varepsilon}{p} = 0,0161 [\text{‰}].$$

9. Wcisk względny dopuszczalne ze względu na wytrzymałość elementów:

$$\varepsilon_{dop} = p_{dop} * \frac{\varepsilon}{p} = 1,4088 [\text{‰}].$$

10. Poprawki wcisku względnego:

- na wygładzenie chropowatości obliczone:

$$\delta_{Ra} = \frac{6}{d}(R_{a1} + R_{a2}) = 0,1611 [\text{‰}],$$

- na zmianę wcisku w wyniku rozszerzalności cieplnej przy ogrzewaniu (w temp.  $T = T_{max} = 40^{\circ}\text{C}$ ):

$$\delta_T = (\alpha_1 - \alpha_2)(T - T_M) * 1000 = 0,02 [\text{‰}] \quad \delta_T > 0 \quad \text{wcisk rośnie,}$$

- na zmianę wcisku w wyniku rozszerzalności cieplnej przy oziębianiu (w temp.  $T = T_{min} = -10^{\circ}\text{C}$ ):

$$\delta_T = (\alpha_1 - \alpha_2)(T - T_M) * 1000 = -0,015 [\text{‰}] \quad \delta_T < 0 \quad \text{wcisk maleje.}$$

11. Wcisk względny max. ze względu na wytrzymałość:

$$\varepsilon_{max} = \frac{w_{max}}{d} \leq \varepsilon_{dop} - |\delta_T|_{max} = 1,3888 [\text{‰}].$$

12. Wcisk względny wymagany ze względu na obciążenie:

$$\varepsilon_{min} = \frac{w_{min}}{d} \geq \varepsilon_{wym} + \delta_{Ra} + |\delta_T|_{min} = 0,1922 [\text{‰}].$$

13. Wcisk bezwzględny:

$$w_{min} = \varepsilon_{min} * d = 13,5 [\mu m],$$

$$w_{max} = \varepsilon_{max} * d = 97,2 [\mu m].$$

14. Dobór pasowania

Tolerancja wcisku wymagana:

$$T_w = w_{max} - w_{min} = 97,2 - 13,5 = 83,7 [\mu m].$$

Dla wymiaru nominalnego "d" z odpowiedniej kolumny wybieramy dwie liczby, których suma spełnia warunek:  $T_1 + T_2 \leq T_w$ .

klasa	dla d =	70	
<b>7</b>	T <sub>1</sub> =	<b>30</b>	wątek dokładniej
<b>8</b>	T <sub>2</sub> =	<b>46</b>	otwór mniej dokładnie
	T <sub>1</sub> +T <sub>2</sub> =	76	<T <sub>w</sub> = 83,7

Przyjmujemy zasadę stałego otworu:  $\Phi 70H8 = \Phi 70_{EI=0}^{ES=T_2=46}$

Zatem dla wałka:

$$ei \geq w_{min} + ES = 59,5$$

$$es \leq w_{max} + EI = 97,2$$

Z tablic tolerancji wałków wybieramy:  $\Phi 70s7 = \Phi 70_{ei=59}^{ES=ei+T_1=89}$ .

Obliczenia sprawdzające:

1. Wcisk rzeczywisty montażowy:

$$w_{min} = ei - ES = 13 [\mu m],$$

$$w_{max} = es - EI = 89 [\mu m].$$

2. Wcisk względny:

$$\varepsilon_{min} = \frac{w_{min}}{d} = 0,1857 [\%],$$

$$\varepsilon_{max} = \frac{w_{max}}{d} = 1,2714 [\%].$$

3. Odształcenia względne rzeczywiste:

$$\varepsilon_{rzecz.max(dop)} = \varepsilon_{max} + |\delta_T|_{max} = 1,2914 [\%],$$

$$\varepsilon_{rzecz.min(wym)} = \varepsilon_{min} - |\delta_T|_{min} = 0,0096 [\%].$$

4. Naprężenia rzeczywiste:

$$p_{rzecz.max} = \frac{\varepsilon_{rzecz.max}}{\varepsilon/p} = 53,85 \text{ MPa} < p_{dop} = 58,75 \text{ [MPa]},$$

$$p_{rzecz.min} = \frac{\varepsilon_{rzecz.min}}{\varepsilon/p} = 0,40 \text{ [MPa]}.$$

$p_{max}$  – w temperaturze montażu (do obliczenia siły potrzebnej do wtłoczenia)

$$p_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon/p} = 53,02 \text{ [MPa]}.$$

5. Obciążalność złącza siłą wzdłużną:

$$F \leq \pi * d * l * p_{rzecz.min} * \mu_{min} = 633N \text{ (przy najmniejszym wcisku)}$$

6. Siła potrzebna do wtłoczenia pierścienia w temp. montażu:

$$F \geq \pi * d * l * p_{max} * \mu_{max} = 130 589 \text{ [N]}.$$

7. Maksymalne naprężenia obw. na pow. zewn. oprawy:

$$\sigma'_{2max} = \sigma_2 - p_{rzecz.max} = \left( \frac{\sigma_2}{p} - 1 \right) p_{rzecz.max} = 43,89 \text{ [MPa]}.$$

8. Minimalne naprężenia obw. na pow. zewn. Oprawy:

$$\sigma'_{2min} = \sigma_2 - p_{rzecz\ min} = \left(\frac{\sigma_2}{p} - 1\right) p_{rzecz\ min} = 0,33 \text{ [MPa]}.$$

9. Maks. odkształcenie względne powierzchni swobodnej oprawy:

$$\varepsilon'_{2max} = \frac{1000\sigma'_{2max}}{E_2} = 0,51286 \text{ [‰]}.$$

10. Min. odkształcenie względne powierzchni swobodnej oprawy:

$$\varepsilon'_{2min} = \frac{1000\sigma'_{2min}}{E_2} = 0,00381 \text{ [‰]}.$$

11. Maks. zwiększenie średnicy zewnętrznej oprawy:

$$\Delta d_{2z\ max} = \frac{\varepsilon'_{2max} * d_{2z}}{1000} = 0,057 \text{ [mm]}.$$

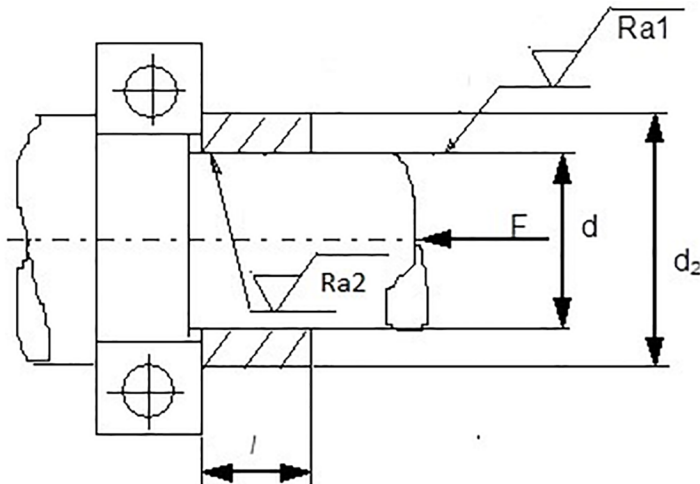
12. Min. zwiększenie średnicy zewnętrznej oprawy:

$$\Delta d_{2z\ min} = \frac{\varepsilon'_{2min} * d_{2z}}{1000} = 0,0004 \text{ [mm]}.$$

## Zadanie 2

Dla złącza wciskowego wtlaczanego przedstawionego na szkicu obliczyć:

- współczynniki bezpieczeństwa dla czopa i oprawy,
- obciążalność siłą wzdłużną i momentem,
- siłę potrzebną do wtlóczenia oprawy,
- o ile zmieni się średnica zewnętrzna oprawy.



Rys. 4.3. Schemat połączenia ciernego do Zadania 2

Źródło: opracowanie własne.

Parametry zadane:

	czop-1	piasta-2	
mat.	45 C45	250 EN-GJL-250	
d	70	70	mm
Ra	1,25	1,25	μm
tolerancja	s7	H7	
d <sub>w</sub>	0	70	mm
d <sub>z</sub>	70	80	mm
l		25	mm

Parametry zakładane:

	wspólne	czop-1	piasta-2	
Rm		610	250	MPa
Re		360	220	MPa
Rc		360	800	MPa
E		210000	100000	MPa
□		0,3	0,25	
μ <sub>max</sub>	0,22			
μ <sub>min</sub>	0,06			

## Rozwiązanie

1. Odchyłki czopa:  $e_s = 89 [\mu m]$ ,  $e_i = 59 [\mu m]$ .
2. Odchyłki otworu oprawy:  $E_s = 30 [\mu m]$ ,  $E_i = 0 [\mu m]$ .
3. Wymiary graniczne czopa:

$$d_{1 \max} = d + e_s = 70 + 0,089 = 70,089 [mm], \text{ Koło zębate walcowe o zębach śrubowych}$$

$$d_{1 \min} = d + e_i = 70 + 0,059 = 70,059 [mm].$$

4. Wymiary graniczne otworu oprawy:

$$d_{2 \max} = d + E_s = 70 + 0,030 = 70,030 [mm].$$

$$d_{2 \min} = d + E_i = 70 + 0 = 70 [mm].$$

5. Współczynniki wydrążenia:

$$x_1 = \frac{d_{w1}}{d_{z1}} = 0,$$

$$x_2 = \frac{d_{w2}}{d_{z2}} = \frac{70}{80} = 0,875.$$

6. Stosunek naprężeń obwodowych do promieniowych:

$$\frac{\sigma_1}{p} = \frac{1+x_1^2}{1-x_1^2} = 1,$$

$$\frac{\sigma_2}{p} = \frac{1+x_2^2}{1-x_2^2} = 7,5333.$$

7. Podatność złącza:

$$\frac{\varepsilon}{p} = \frac{1000}{E_1} \left( \frac{\sigma_1}{p} - \nu_1 \right) + \frac{1000}{E_2} \left( \frac{\sigma_2}{p} + \nu_1 \right) = 0,0812 \left[ \frac{\%}{MPa} \right].$$

8. Wcisk rzeczywisty montażowy:

$$w_{min} = d_{1min} - d_{2max} = e_i - E_s = 29 [\mu m],$$

$$w_{max} = d_{1max} - d_{2min} = e_s - E_i = 89 [\mu m].$$

Gdybyśmy mieli wymiary zmierzone, wcisk należałoby obliczyć z zależności:

$$w_{pom} = d_{1pom} - d_{2pom}.$$

9. Wcisk względny:

$$\varepsilon_{min} = \frac{w_{min}}{d} = 0,4143 [\%],$$

$$\varepsilon_{max} = \frac{w_{max}}{d} = 1,2714 [\%].$$

Gdybyśmy mieli wymiary zmierzone, wcisk względny należałoby obliczyć z zależności:

$$\varepsilon_{pom} = \frac{w_{pom}}{d}.$$

10. Zmniejszenie wcisku wywołane wygładzeniem nierówności powierzchni styku (nie uwzględniony przy obliczeniach wytrzymałościowych):

$$\delta_{Ra} = \frac{6}{d} (R_{a1} + R_{a2}) = 0,2143 [\%].$$

11. Poprawka temperaturowa:

$$\delta_T = (\alpha_1 - \alpha_2)(T - T_M) * 1000 = 0 [\%].$$

12. Odształcenia względne rzeczywiste (z uwzględnieniem poprawek) przy obliczaniu wytrzymałości:

- jeśli wcisk rośnie ze zmianą temperatury – tzn.  $\delta_T > 0$ :

$$\varepsilon_{rzecz.pom} = \varepsilon_{pom} + \delta_T = 1,2714 [\%] \quad (\text{lub } \varepsilon_{rzecz.pom} = \varepsilon_{pom} + \delta_T)$$

- jeśli wcisk maleje (lub się nie zmienia) ze zmianą temp. przyjmujemy:  
 $\delta_T = 0$  (największy wcisk wystąpi w temp. montażu),

- przy obliczaniu obciążalności (obc. dop. w zadanej temperatur lub przedziale  $T_{max}, T_{min}$ )  $\delta_T$  uwzględniamy tylko wtedy, gdy wcisk maleje tzn.  $\delta_T < 0$  (zmniejsza obciążalność!).

$$\varepsilon_{rzecz.min} = \varepsilon_{min} - \delta_{Ra} + \delta_T = 0,2 [\%],$$

$$\varepsilon_{rzecz.pom} = \varepsilon_{pom} - \delta_{Ra} + \delta_T$$

Z równania:

$$\frac{\varepsilon_{rzecz}}{p_{rzecz}} = \frac{\varepsilon_{pom}}{p_{pom}} = \frac{\varepsilon_{max}}{p_{max}} = \frac{\varepsilon}{p} = const$$

obliczymy

$$p_{rzecz.max} = \frac{\varepsilon_{rzecz.max}}{\varepsilon/p} = 15,66 [MPa]$$

oraz

$$p_{rzecz.min} = \frac{\varepsilon_{rzecz.min}}{\varepsilon/p} = 2,46 [MPa],$$

$$p_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon/p} = 15,66 [MPa].$$

13. Współczynnik bezpieczeństwa.

- dla materiałów ciągliwych (czop) –  $p_{dop} = R_e = 360 [MPa]$ :

$$x_{e1} = \frac{p_{dop}}{p_{rzecz.max}} = \frac{360}{15,66} = 22,99.$$

- dla mat. kruchych po przyjęciu  $p_{dop} = p_{rzecz.max}$ .  
oraz przekształceniu odp. wzoru otrzymamy dla oprawy (materiał kruchy):

$$x_{R2} = \frac{R_{m2}}{p_{rzecz.max} \left( \frac{\sigma_2}{p} + \frac{R_{m2}}{R_{c2}} \right)} = 2,03$$

14. Obciążalność złącza siłą wzdłużną:

$$F \leq \pi * d * l * p_{rzecz.min} * \mu_{min} = 811 [N].$$

15. Obciążalność momentem skręcającym:

$$M_s \leq \pi * d * l * p_{rzecz.min} * \mu_{min} * \frac{d}{2} = 28385 [Nmm].$$

16. Siła potrzebna do wtłoczenia pierścienia:

$$F \geq \pi * d * l * p_{max} * \mu_{max} = 18\,941 [N].$$

17. Maksymalne naprężenia obw. na pow. zewn. oprawy:

$$\sigma'_{2max} = \sigma_2 - p_{rzecz\ max} = \left(\frac{\sigma_2}{p} - 1\right) p_{rzecz\ max} = 102,31 [MPa].$$

18. Maksymalne odkształcenie względne powierzchni swobodnej oprawy:

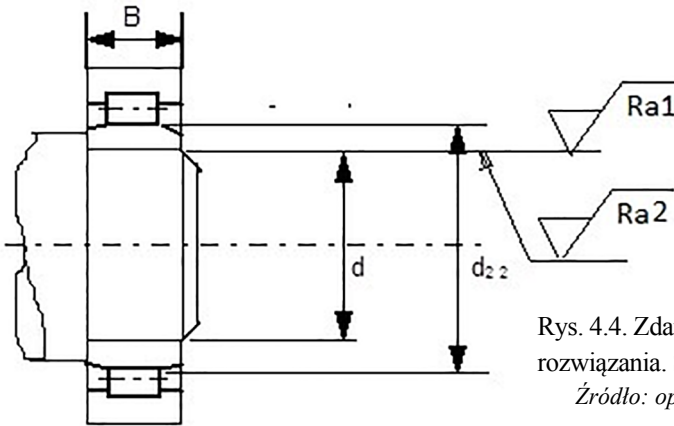
$$\varepsilon'_{2max} = \frac{1000\sigma'_{2max}}{E_2} = 1,0231 [\%].$$

19. Maksymalne zwiększenie średnicy zewnętrznej oprawy:

## Zadania do samodzielnego rozwiązania

### Zadanie 1

Obliczyć o ile zmieni się luz poprzeczny w łożysku walcowym zmontowanym jak na szkicu.



Rys. 4.4. Zdania do samodzielnego rozwiązania. Szkic do Zadania 1  
Źródło: opracowanie własne.

Parametry zadane do zadania 1:

łożysko		NU 210	
	czop-1	pierścień-2	
mat.	45 C45	ŁH15 100Cr6	
d	50	50	mm
Ra	0,32	0,32	μm
tolerancja	m5		
d <sub>w</sub>	0	50	mm
d <sub>z</sub>	50	60,4	mm
B		20	mm

Parametry zadane do zadania 1:

	wspólne	czop-1	pierścień-2	
E		210000	208000	MPa
v		0,3	0,3	
μ <sub>max</sub>	0,22			



## Zadanie 2

Brązową (CuSn10P) tuleję o wymiarach:

$$D_z = 140 \text{ mm},$$

$$D_w = 100\text{H7},$$

$$L = 80 \text{ mm},$$

osadzono na stalowej tulei (C45) o wymiarach:

$$d_z = 100\text{s6},$$

$$d_w = 50 \text{ mm}.$$

Złącze zmontowano w temperaturze  $t_m = 20^\circ\text{C}$ .

Powierzchnie robocze połączenia wykonano z parametrem chropowości

$$R_a = 0,6 \mu\text{m}.$$

Złącze pracuje w temperaturze  $-20^\circ\text{C} \leq t_p \leq +50^\circ\text{C}$ .

Obliczyć obciążalność złącza momentem obrotowym.

Parametry zadane do zadania 2:

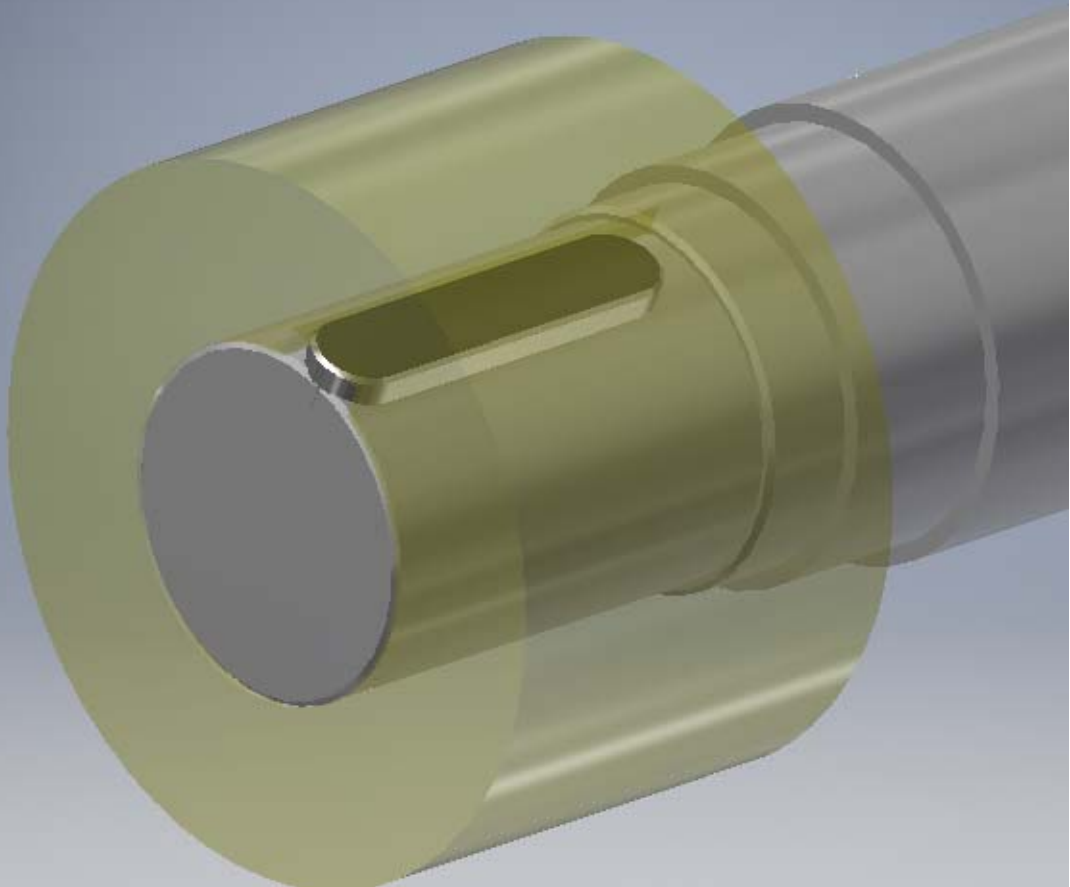
	czop-1	piasta-2	
mat.	C45	CuSn10P	
d	100	100	mm
Ra	0,6	0,6	$\mu\text{m}$
tolerancja	s6	H7	
d <sub>w</sub>	50	100	mm
d <sub>z</sub>	100	140	mm
l		80	mm
T <sub>min</sub>	-20		°C
T <sub>max</sub>	50		°C
T <sub>m</sub>	20		°C

Parametry zakładane do zadania 2:

	wspólne	czop-1	piasta-2	
R <sub>m</sub>		630	310	MPa
R <sub>e</sub>		370	170	MPa
R <sub>c</sub>		630	310	MPa
E		210000	85000	MPa
v		0,3	0,35	
α <sup>+</sup>	Ogrzew.	1,10E-05	1,75E-05	1/°C
α <sup>-</sup>	Ozięb.	8,50E-06	1,55E-05	1/°C
μ <sub>max</sub>	0,1			
μ <sub>min</sub>	0,05			

Uwaga: Podczas prowadzenia obliczeń połączeń ciernych zalecane jest uwzględnianie wartości parametru  $R_a$  zgodnie z obowiązującą normą ISO 1302; 2004 (przyp. AM).





## **Rozdział 5**

### **POŁĄCZENIA WPUSTOWE I WIELOWYPUSTOWE**

Opracowanie:

treści merytoryczne: dr inż. Andrzej Maciejczyk

zadania: dr inż. Marek Woźniak

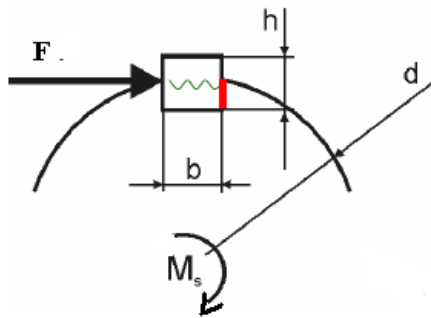
## Połączenia wpustowe

Połączenia wpustowe służą do zespolenia osiowego dwóch, wykonujących ruch obrotowy części za pomocą dodatkowego, prostokątnego elementu, często z zaokrąglonymi powierzchniami czołowymi. Podstawowym zadaniem połączenia wpustowego jest przenoszenie momentu obrotowego.

Wymiary wpustów, jak też rowków pod wpusty zostały znormalizowane. Z tego powodu wymiary poprzeczne wpustu dobierane są w oparciu o średnicę czopa. Długość wpustu determinują obliczenia wytrzymałościowe z warunku nieprzekroczenia dopuszczalnego nacisku.

## Obliczenia wytrzymałościowe

Dla wytrzymałości złącza decydujące są naciski powierzchniowe (obliczenia na ścinanie są pomijane).



Rys. 5.1. Schemat obciążenia  
Źródło: opracowanie własne.

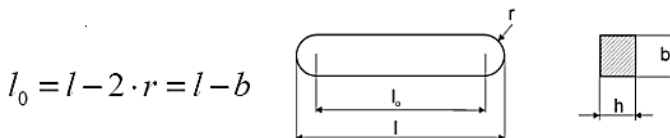
Warunek wytrzymałościowy:

$$\sigma_d = \frac{F}{zA_d} \leq k_d \text{ [MPa]},$$

gdzie:  $z$  – liczba wpustów (max. 2),

$k_d$  – dopuszczalne naprężenia dociskowe [MPa].

Obliczeniowa długość wpustu



Rys. 5.2. Obliczeniowa długość wpustu  
Źródło: opracowanie własne.

gdzie:  $l_0$  – długość obliczeniowa wpustu [mm],  
 $l$  – całkowita długość wpustu [mm],  
 $r$  – promień zaokrąglenia [mm],  
 $b$  – szerokość wpustu [mm],  
 $h$  – wysokość wpustu [mm].

Tabela 5.1. Dopuszczalne naciski dla połączeń wpustowych [4]

Rodzaj materiału		Naprężenia dopuszczalne [MPa]	
Wpust	Piasta/wałek	Połączenie spoczynkowe	Połączenie ruchowe
E295 E360	Żeliwo	30-50	20-40
E295 E360 C45	Stal, staliwo	60-90	20-40
E360 C45	Stal utwardzona	200-300	120-200

## Połączenia wielowypustowe

Połączenie wielowypustowe to drugi po połączeniach wpustowych rodzaj najczęściej wykorzystywanego połączenia. W zależności od kształtu wyróżnia się wielowypusty:

- prostokątne,
- ewolwentowe,
- trójkątne (karbowe).

Liczbę wypustów prostokątnych przyjmuje się parzystą. Zwykle jest ich 4-10 dla serii obciążeniowej lekkiej lub średniej, powyżej 10 dla serii ciężkiej. Seria obciążeniowa lekka zalecana jest w połączeniach spoczynkowych, średnia dla połączeń ruchowych oraz ciężka w przypadku występowania obciążeń o zmiennym kierunku.

W przypadku wyboru tego rodzaju połączenia do przenoszenia momentu skręcającego, niezmiernie istotny jest sposób osiowania.

## Obliczenia wytrzymałościowe

Połączenia wielowypustowe liczone są tak samo jak połączenia wpustowe – na docisk.

Warunek wytrzymałościowy:

$$\sigma_d = k \frac{F}{A_d} \leq k_d,$$

gdzie:  $A_d$  – pole powierzchni docisku [mm],

$k$  – współczynnik niedokładności wykonania = 1/0,75

$k_d$  – dopuszczalne naprężenia dociskowe [MPa].

Po uwzględnieniu wartości współczynnika niedokładności wykonania, warunek wytrzymałościowy przyjmuje postać:

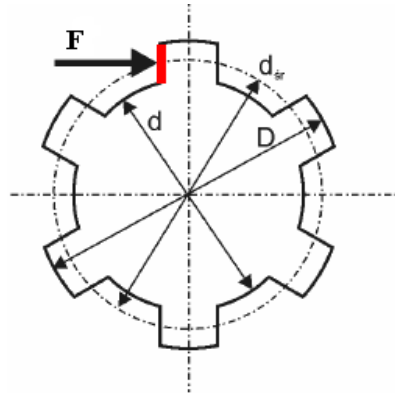
$$\sigma_d = \frac{F}{0,75 \cdot A_d} \leq k_d.$$

W rutynowych obliczeniach inżynierskich pole powierzchni docisku wyliczane jest na podstawie wzoru uproszczonego:

$$A_d = \frac{D-d}{2} * l * N,$$

gdzie:  $l$  – długość wpustu,

$N$  – liczba wpustów.



Rys. 5.3. Schemat obciążenia  
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5.2. Dopuszczalne naciski dla połączeń wielowypustowych [4]

Rodzaj połączenia	Warunki pracy	Powierzchnie robocze czopa nieutwardzone [MPa]	Powierzchnie robocze czopa ulepszone lub hartowane [MPa]
Połączenia spoczynkowe	I	35-50	40-70
	II	60-100	100-140
	III	80-129	120-200
Połączenia ruchowe przesuwne bez obciążenia	I	15-20	20-35
	II	20-30	30-60
	III	25-40	40-70
Połączenia ruchowe przesuwne pod obciążeniem	I	-	3-10
	II	-	5-15
	III	-	10-20

I – Obciążenia uderzeniowe kierunkowo zmienne, złe smarowanie, materiały o niskiej wytrzymałości, niska dokładność wykonania kształtu, duża chropowatość powierzchni.

II – Obciążenia zmienne, przeciętne smarowanie, materiały średniej wytrzymałości, przeciętna dokładność kształtu i chropowatość powierzchni.

III – Obciążenia działające wyłącznie w jednym kierunku, dobre smarowanie, materiały wysokiej wytrzymałości, dobra dokładność kształtu, mała chropowatość powierzchni.

## Zadanie 1

Sprawdzić wytrzymałość połączenia wpustowego dla następujących danych:

$M_o = 80 [Nm]$  (moment obrotowy),

$d = 40 [mm]$  (średnica wału),

$l = 32 [mm]$  (długość wpustu),

$b = 12 [mm]$  (szerokość wpustu),

$h = 8 [mm]$  (wysokość wpustu),

$k_d = 50 [MPa]$  dla stali E295 (naciski dopuszczalne).

## Rozwiązanie

1. Należy sprawdzić warunek wytrzymałościowy:

$$\sigma_d = \frac{F}{z \cdot A_d} \leq k_d$$

gdzie:  $z$  – liczba wpustów,

$A_d$  – pole powierzchni docisku,

$F$  – siła obwodowa.

2. Wyznaczamy siłę obwodową na powierzchni styku czopa i piasty:

$$F = \frac{z \cdot M_o}{d} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 1000}{40} = 4000 [N].$$

3. Wyznaczamy pole powierzchni docisku wpustu:

$$A_d = (l - b) \cdot \frac{h}{2} = (32 - 8) \cdot \frac{8}{2} = 96 [mm^2].$$

4. Wyznaczamy naciski powierzchniowe:

$$\sigma_d = \frac{F}{z \cdot A_d} = \frac{4000}{1 \cdot 96} = 41,6 [MPa] \leq k_d = 50 [MPa].$$

## Zadanie 2

Sprawdzić wytrzymałość połączenia wielowypustowego dla następujących danych:

$M_o = 80 [Nm]$  (moment obrotowy),

$D = 30 [mm]$  (średnica zewnętrzna wielowypustu),

$d = 26 [mm]$  (średnica wewnętrzna wielowypustu),

$l = 30 [mm]$  (długość wielowypustu),

$z = 6$  (liczba wypustów),

$k_d = 50 [MPa]$  dla stali E295 (naciski dopuszczalne).

## Rozwiązanie

1. Należy sprawdzić warunek wytrzymałościowy:

$$\sigma_d = \frac{F}{0,75 \cdot A_d} \leq k_d,$$

gdzie:  $A_d$  – pole powierzchni docisku,

$F$  – siła obwodowa średniej średnicy połączenia.

2. Wyznaczamy siłę obwodową na powierzchni styku czopa i piasty:

$$F = \frac{4 \cdot M_o}{(D+d)} = \frac{4 \cdot 80 \cdot 1000}{(30+26)} = 5714 [N].$$

3. Wyznaczamy pole powierzchni docisku wpustu:

$$A_d = \frac{D-d}{2} \cdot l \cdot z = \frac{30-26}{2} \cdot 30 \cdot 6 = 360 [mm^2].$$

4. Wyznaczamy naciski powierzchniowe:

$$\sigma_d = \frac{F}{0,75 \cdot A_d} = \frac{5714}{0,75 \cdot 360} = 21,2 [MPa] \leq k_d = 50 [MPa]$$

## Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Sprawdzić wytrzymałość połączenia wpustowego dla następujących danych:

$M_o = 150 [Nm]$  (moment obrotowy),

$d = 45 [mm]$  (średnica wału),

$l = 40 [mm]$  (długość wpustu),

$b = 14 [mm]$  (szerokość wpustu),

$h = 8 [mm]$  (wysokość wpustu),

Elementy wykonane ze stali E295.

2. Sprawdzić wytrzymałość połączenia wielowypustowego dla następujących danych:

$M_o = 200 [Nm]$  (moment obrotowy),

$D = 38 [mm]$  (średnica zewnętrzna wielowypustu),

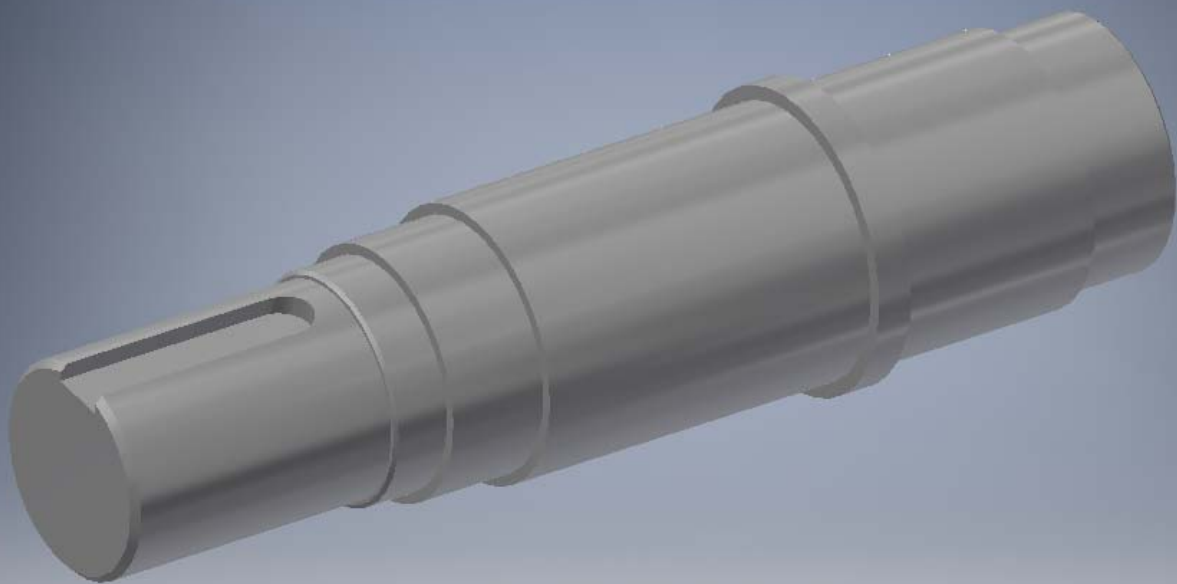
$d = 32 [mm]$  (średnica wewnętrzna wielowypustu),

$l = 30 [mm]$  (długość wielowypustu),

$z = 8$  (liczba wypustów),

Elementy wykonane ze stali E295.





# Rozdział 6

## WAŁY

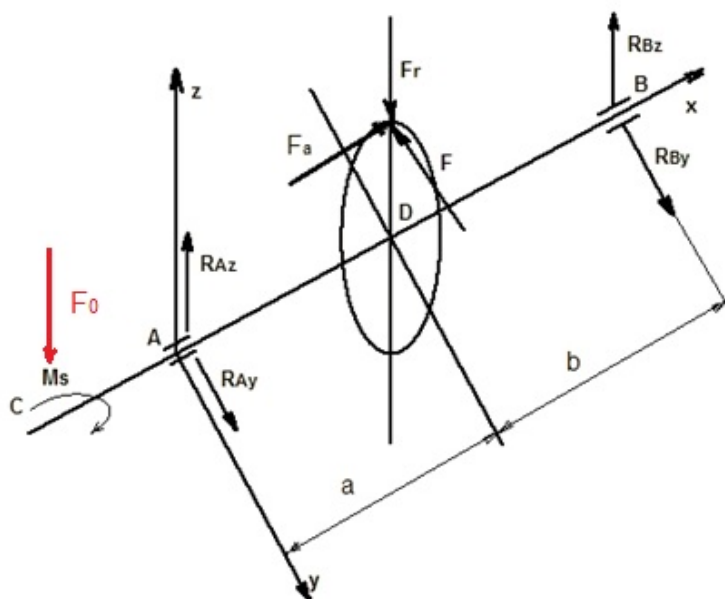
Opracowanie:

treści merytoryczne: dr inż. Andrzej Maciejczyk

zadania: dr inż. Marek Woźniak

W konstrukcji maszyn zwykle do przenoszenia napędu wykorzystuje się ruch obrotowy (rzadziej posuwisto-zwrotny). Z tego względu niezmiernie istotne staje się poprawne projektowanie wałów. Głównym zadaniem tego elementu jest przeniesienie momentu obrotowego. Dodatkowo wały przenoszą obciążenia zginające. Podobnymi do wałów elementami konstrukcyjnymi są osie. Należy jednakże pamiętać, że osie podlegają tylko i wyłącznie zginaniu. Nie przenoszą momentu skręcającego.

Schemat przykładowego wału napędowego obciążonego momentem skręcającym  $M_s$  przedstawiono na rysunku 6.1.



Rys. 6.1. Schemat obciążenia wału napędowego  
*Źródło: opracowanie własne.*

Moment obrotowy wału przekazywany jest poprzez koło zębate (tu o zębach skośnych).

Stąd:

$$F = \frac{2M_s}{D}$$

$$F_r = \frac{F \tan \alpha_n}{\cos \beta}$$

$$F_a = F \tan \beta$$

gdzie:  $\alpha$  – kąt zarysu zęba,  
 $\beta$  – kąt pochylenia linii zęba.

Najpierw należy obliczyć reakcje w podporach oraz ustalić wartości momentów gnących (ewentualnie momentu skręcającego).

Dobór średnicy czopa wału, jak też kolejnych średnic odsadzeń dokonuje się w oparciu o obliczenia zmęczeniowe naprężeń zastępczych.

$$\sigma_z = \frac{M_z}{W_x} \leq \frac{z_{go}}{x_z}$$

gdzie:  $M_z$  – moment zastępczy,

$W_x$  – wskaźnik na zginanie,

$z_{go}$  – wytrzymałość zmęczeniowa na zginanie (obciążenie zmienne obustronnie tętniące, przewaga naprężeń normalnych),

$x_z$  – zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa.

Wartość zmęczeniowego współczynnika bezpieczeństwa należy przyjąć  $x_z = 4$  (zakłada się naddatek z uwagi na występowanie zjawiska karbu, jak również dodatkowe obciążenie wału od zginania).

Po przekształceniach powyższe równanie przyjmuje postać:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32x_z}{\pi z_{go}}} \sqrt[3]{M_z}$$

Wartość momentu oblicza się w oparciu o wyrażenie:

$$M_z = \sqrt{M_{gy}^2 + M_{gz}^2 + \left(\frac{z_{go}}{2z_{sj}}\right)^2 * M_s^2}$$

gdzie:  $z_{sj}$  – wytrzymałość zmęczeniowa na skręcanie, (obciążenie zmienne jednostronnie tętniące).

Tabela 6.1. Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej stali [wg 13]

Nazwa stali	$Z_{go}$	$Z_{sj}$
Stal konstrukcyjna niestopowa ( $R_m \leq 600$ MPa)	0,5 $R_m$	1,2 $Z_{go}$
Stal niestopowa do ulepszania cieplnego ( $R_m > 600$ MPa)	Normalizowana - 0,45 $R_m$ Ulepszana cieplnie - 0,4 $R_m$	1,1 $Z_{go}$
Stal konstrukcyjna stopowa ulepszana cieplnie	0,4 $R_m$	1,1 $Z_{go}$
Stal sprężynowa (hartowanie i odpuszczanie)	0,45 $R_m$	1,1 $Z_{go}$

## Uwaga

Do doboru wymiaru średnicy czopa możliwe jest również wykorzystanie (wycofanej) normy – PN-M-85000:1998 – Czopy końcowe wałów. Główne wymiary i dopuszczalne momenty obrotowe. Norma pozwala na określenie średnicy czopa w oparciu o przenoszony przez wał moment obrotowy. Wyróżnia również długość czopa – tzw. czopy długie i krótkie.

Podczas projektowania wału napędzającego (szybkoobrotowego) należy pamiętać, że moment skręcający  $M_s$  może być przekazywany nie bezpośrednio z silnika elektrycznego, albo poprzez dodatkową przekładnię np. pasową. Z tego względu należy uwzględnić dodatkowe obciążenie poprzeczne czopa wału  $F_0$  (oznaczone kolorem czerwonym na rysunku 6.1).

Dopuszczalną wartość tego obciążenia wg przytoczonej powyżej normy PN-M-85000:1998 określa zależność:

$$F_0 = 250\sqrt{M_s} \text{ [N]}.$$

W przypadku wału wyjściowego (napędzanego, wolnoobrotowego) przyjmuje się wartość dopuszczalną obciążenia poprzecznego czopa:

$$F_0 = 125\sqrt{M_s} \text{ [N]},$$

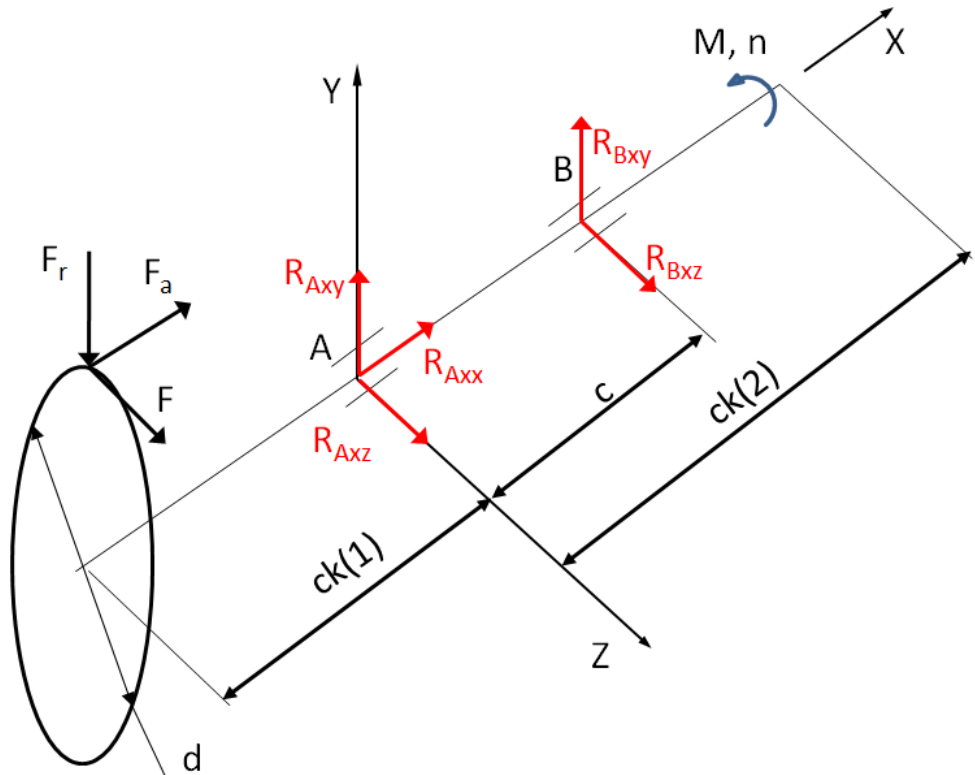
dla reduktorów jednostopniowych oraz

$$F_0 = 250\sqrt{M_s} \text{ [N]},$$

dla reduktorów wielostopniowych.

## Zadanie 1

Zaprojektować wał przekładni zębatej (schemat obciążenia i wymiary podane na szkicu).



Rys. 6.2. Schemat obciążenia wału dla zadania 1

Źródło: opracowanie własne.

Dane:

$$F = 463 \text{ [N]},$$

$$F_r = 354 \text{ [N]},$$

$$F_a = 437 \text{ [N]},$$

$$ck(1) = 70 \text{ [mm]},$$

$$c = 100 \text{ [mm]},$$

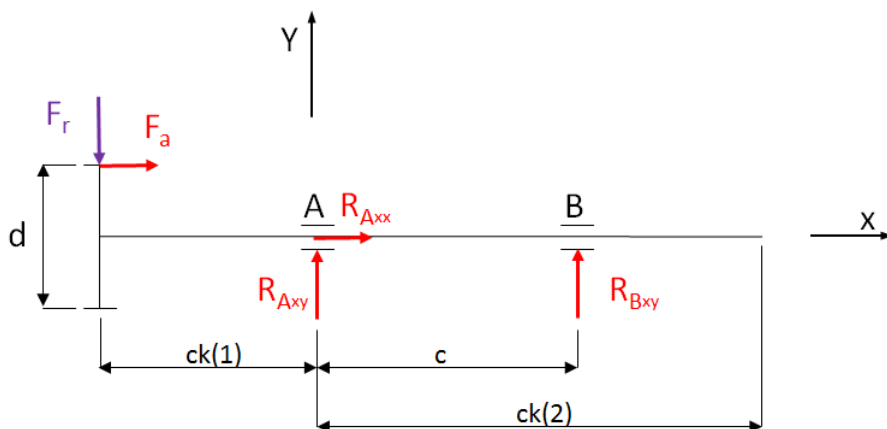
$$ck(2) = 150 \text{ [mm]},$$

$$d = 120 \text{ [mm]},$$

$$x_e = 3,$$

materiał wału – stal 35HGS.

1. Wyznaczamy obciążenia wału siłami poprzecznymi w płaszczyźnie x-y:



Rys. 6.3. Schemat obciążenia wału siłami poprzecznymi w płaszczyźnie x-y. Zadanie 1

Źródło: opracowanie własne.

$$\sum M_{iA} = -R_{Bxy} \cdot c + F_a \cdot \frac{d}{2} - F_r \cdot ck(1) = 0,$$

$$R_{Bxy} = \left( F_a \cdot \frac{d}{2} - F_r \cdot ck(1) \right) \cdot \frac{1}{c},$$

$$R_{Bxy} = \left( 437 \cdot \frac{120}{2} - 354 \cdot 70 \right) \cdot \frac{1}{100} = 14,4 \text{ [N]}.$$

$$\sum M_{iB} = R_{Axy} \cdot c + F_a \cdot \frac{d}{2} - F_r \cdot (ck(1) + c) = 0,$$

$$R_{Axy} = \left( F_r \cdot (ck(1) + c) - F_a \cdot \frac{d}{2} \right) \cdot \frac{1}{c}.$$

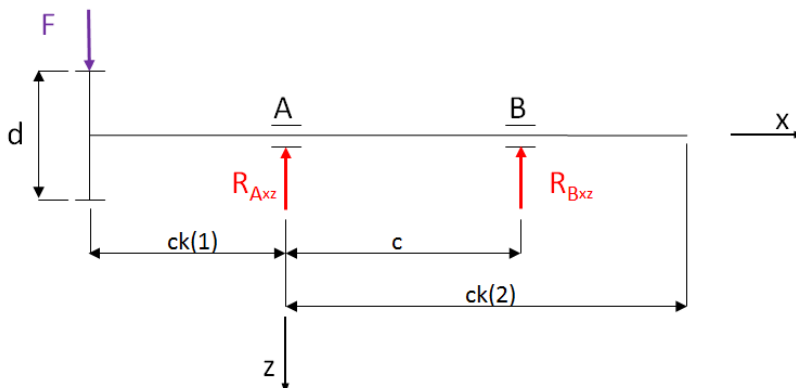
$$R_{Axy} = \left( 354 \cdot (70 + 100) - 437 \cdot \frac{120}{2} \right) \cdot \frac{1}{100} = -340 \text{ [N]}.$$

$$\sum F_{ix} = R_{Axx} + F_a = 0,$$

$$R_{Axx} = -F_a,$$

$$R_{Axx} = -437 \text{ [N]}.$$

2. Wyznaczamy obciążenia wału siłami wzdłużnymi w płaszczyźnie x-z:



Rys. 6.4. Schemat obciążenia wału siłami poprzecznymi w płaszczyźnie x-z. Zadanie 1  
*Źródło: opracowanie własne.*

$$\sum M_{iA} = R_{Bxz} \cdot c + F \cdot ck(1) = 0,$$

$$R_{Bxz} = -F \cdot \frac{ck(1)}{c},$$

$$R_{Bxz} = -463 \cdot \frac{70}{100} = -324 \text{ [N]}.$$

$$\sum M_{iB} = R_{Axz} \cdot c - F \cdot (ck(1) + c) = 0,$$

$$R_{Axz} = F \cdot \frac{ck(1)+c}{c},$$

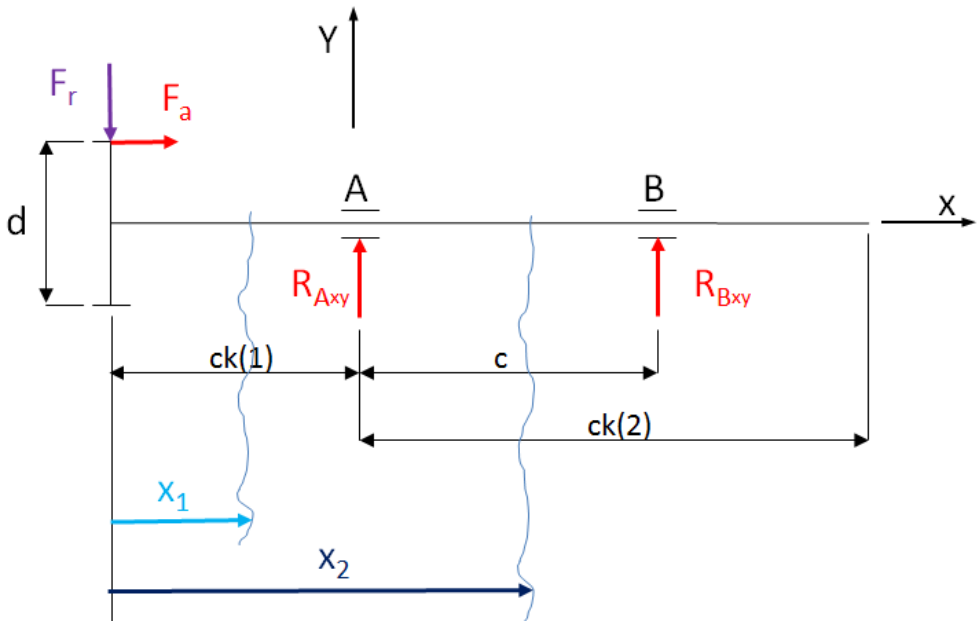
$$R_{Axz} = 463 \cdot \frac{70+100}{100} = 787 \text{ [N]}.$$

3. Wyznaczamy wypadkowe reakcje w łożyskach:

$$R_A = \sqrt{R_{Axy}^2 + R_{Axz}^2} = \sqrt{(-340)^2 + (787)^2} = 857 \text{ [N]},$$

$$R_B = \sqrt{R_{Bxy}^2 + R_{Bxz}^2} = \sqrt{(14,4)^2 + (-324)^2} = 324 \text{ [N]}.$$

4. Wyznaczamy momenty gnące w charakterystycznych punktach wału w płaszczyźnie x-y:



Rys. 6.5. Schemat do wyznaczania momentów gnących wału w płaszczyźnie x-y. Zadanie 1  
Źródło: opracowanie własne.

$$0 \leq x_1 \leq ck(1)$$

$$M_{gxy} = F_a \cdot \frac{d}{2} - F_r \cdot x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=ck(1)},$$

$$M_{gxy, x_1=0} = 437 \cdot \frac{120}{2} - 354 \cdot 0 = 26,2 \text{ [Nm]},$$

$$M_{gxy, x_1=ck(1)} = 437 \cdot \frac{120}{2} - 354 \cdot 70 = 1,44 \text{ [Nm]}.$$

$$ck(1) \leq x_2 \leq ck(1)+c$$

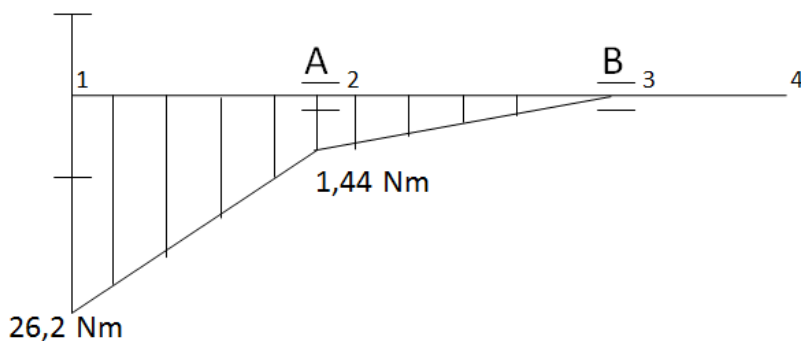
$$M_{gxy} = F_a \cdot \frac{d}{2} - F_r \cdot x_2 \Big|_{x_1=ck(1)}^{x_1=ck(1)+c} + R_{axy} \cdot (x_2 - ck(1)) \Big|_{x_1=ck(1)}^{x_1=ck(1)+c},$$

$$M_{gxy, x_2=ck(1)} = 437 \cdot \frac{120}{2} - 354 \cdot 70 + 340 \cdot (70 - 70) = 1,44 \text{ [Nm]}.$$

$$M_{gxy, x_2=ck(1)+c} = 437 \cdot \frac{120}{2} - 354 \cdot (70 + 100) + 340 \cdot (70 + 100 - 70) = 0 \text{ [Nm]}.$$

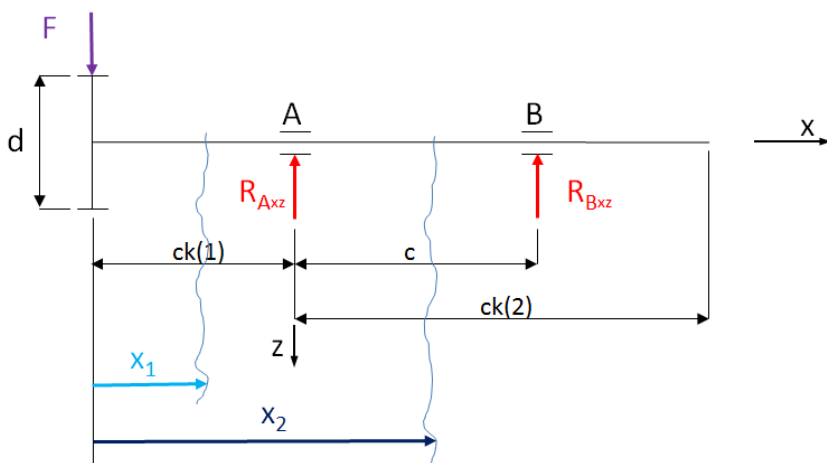


Wykres obciążeń momentów gnących w płaszczyźnie x-y w charakterystycznych punktach wału:



Rys. 6.6. Wykres momentów gnących wału w płaszczyźnie x-y. Zadanie 1  
Źródło: opracowanie własne.

5. Wyznaczamy momenty gnące w charakterystycznych punktach wału w płaszczyźnie x-z:



Rys. 6.7. Schemat do wyznaczania momentów gnących wału w płaszczyźnie x-z. Zadanie 1

$$0 \leq x_1 \leq ck(1)$$

$$M_{gxz} = F \cdot x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=ck(1)},$$

$$M_{gxz, x_1=0} = 463 \cdot 0 = 0 \text{ [Nm]},$$

$$M_{gzx, x_1=ck(1)} = 463 \cdot 70 = 32,4 \text{ [Nm]}.$$

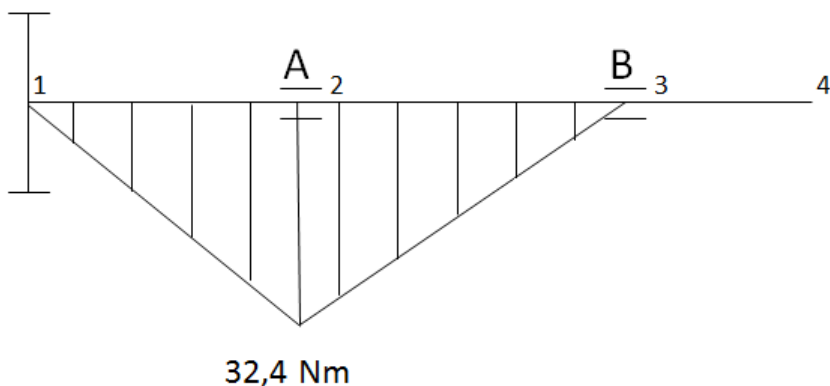
$$ck(1) \leq x_2 \leq ck(1)+c$$

$$M_{gzx} = F \cdot x_1 \Big|_{x_1=ck(1)}^{x_1=ck(1)+c} - R_{Axz} \cdot (x_1 - ck(1)) \Big|_{x_1=ck(1)}^{x_1=ck(1)+c},$$

$$M_{gzx, x_2=ck(1)} = 463 \cdot 70 - 787 \cdot (70 - 70) = 32,4 \text{ [Nm]},$$

$$M_{gzx, x_2=ck(1)+c} = 463 \cdot (70 + 100) - 787 \cdot (70 + 100 - 70) = 0 \text{ [Nm]}.$$

Wykres momentów gnących w płaszczyźnie x-z w charakterystycznych punktach wału:



Rys. 6.8. Wykres momentów gnących wału w płaszczyźnie x-z. Zadanie 1  
Źródło: opracowanie własne.

6. Wypadkowe momentów gnących w charakterystycznych punktach wału:

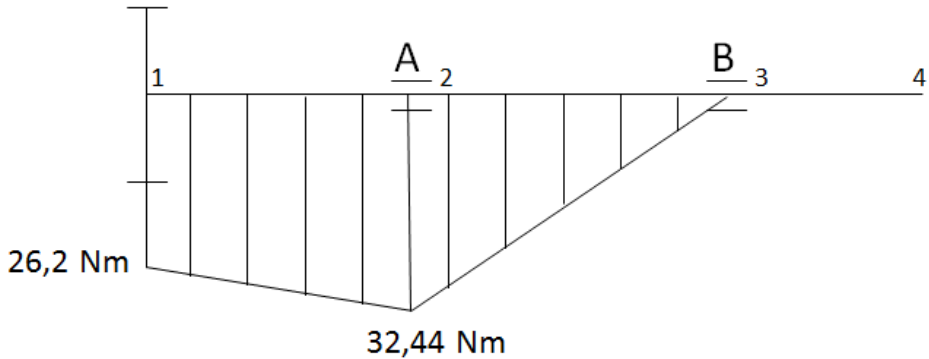
$$M_{g1} = \sqrt{M_{gxy1}^2 + M_{gzx1}^2} = \sqrt{(26,2)^2 + (0)^2} = 26,2 \text{ [Nm]},$$

$$M_{g2} = \sqrt{M_{gxy2}^2 + M_{gzx2}^2} = \sqrt{(1,44)^2 + (32,4)^2} = 32,44 \text{ [Nm]},$$

$$M_{g3} = \sqrt{M_{gxz3}^2 + M_{gxy3}^2} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2} = 0 \text{ [Nm]},$$

$$M_{g4} = \sqrt{M_{gxz4}^2 + M_{gxy4}^2} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2} = 0 \text{ [Nm]}.$$

Wykres wypadkowych momentów gnących w charakterystycznych punktach wału:

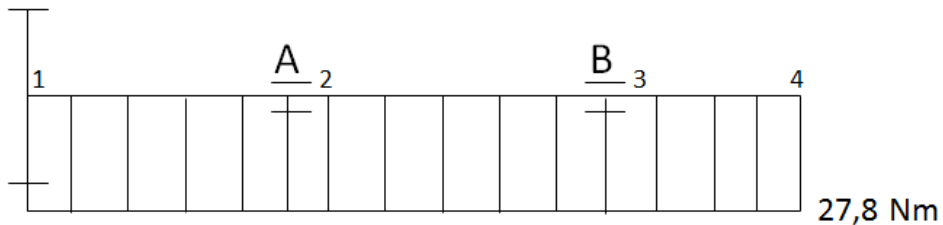


Rys. 6.9. Wykres wypadkowych momentów gnących wału. Zadanie 1  
*Źródło: opracowanie własne.*

7. Obliczamy moment skręcający  $M_s$ :

$$M_s = F \cdot r = F \cdot \frac{d}{2} = 430 \cdot \frac{120}{2} = 27,8 \text{ [Nm]}.$$

Wykres obciążenia dla momentu skręcającego:



Rys. 6.10. Wykres momentu skręcającego. Zadanie 1  
*Źródło: opracowanie własne.*

8. Wyznaczamy moment zastępczy (zredukowany) w charakterystycznych punktach wału:

$$\alpha = \frac{z_{go}}{z_{sj}} = \frac{200}{215} = 0,93.$$

$$M_z = \sqrt{M_g + \left(\frac{\alpha}{2} \cdot M_s\right)^2},$$

gdzie:  $z_{go}$  – wytrzymałość zmęczeniowa na zginanie (obciążenie zmienne obustronnie tętniące),

$z_{sj}$  – wytrzymałość zmęczeniowa na skręcanie, (obciążenie zmienne jednostronnie tętniące).

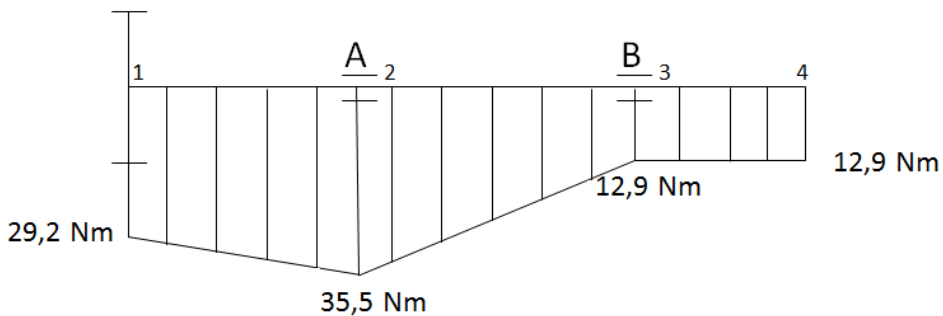
$$M_{z1} = \sqrt{M_{g1}^2 + \left(\frac{\alpha}{2} \cdot M_{s1}\right)^2} = \sqrt{(26,2)^2 + \left(\frac{0,93}{2} \cdot 27,8\right)^2} = 29,2 \text{ [Nm]},$$

$$M_{z2} = \sqrt{M_{g2}^2 + \left(\frac{\alpha}{2} \cdot M_{s2}\right)^2} = \sqrt{(32,44)^2 + \left(\frac{0,93}{2} \cdot 27,8\right)^2} = 35,5 \text{ [Nm]},$$

$$M_{z3} = \sqrt{M_{g3}^2 + \left(\frac{\alpha}{2} \cdot M_{s3}\right)^2} = \sqrt{0 + \left(\frac{0,93}{2} \cdot 27,8\right)^2} = 12,9 \text{ [Nm]},$$

$$M_{z4} = \sqrt{M_{g4}^2 + \left(\frac{\alpha}{2} \cdot M_{s4}\right)^2} = \sqrt{0 + \left(\frac{0,93}{2} \cdot 27,8\right)^2} = 12,9 \text{ [Nm]}.$$

Wykres momentu zredukowanego:



Rys. 6.11. Wykres momentu zredukowanego. Zadanie 1

*Źródło: opracowanie własne.*

9. Obliczamy wymaganą średnicę wału w kształcie paraboloidu obrotowego.

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot x_z}{\pi \cdot z_{go}} \cdot M_z},$$

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{32 x_z}{\pi z_{go}} M_{z1} \cdot 1000} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3}{\pi \cdot 200} \cdot 29,2 \cdot 1000} = 16,46 \text{ [mm]},$$

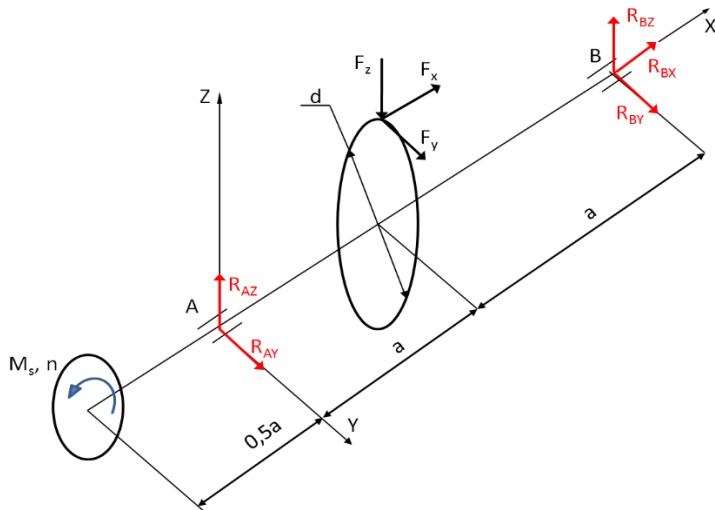
$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{32 x_z}{\pi z_{go}} M_{z2} \cdot 1000} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3}{\pi \cdot 200} \cdot 35,5 \cdot 1000} = 17,57 \text{ [mm]},$$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{32 x_z}{\pi z_{go}} M_{z3} \cdot 1000} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3}{\pi \cdot 200} \cdot 12,9 \cdot 1000} = 12,21 \text{ [mm]},$$

$$d_4 \geq \sqrt[3]{\frac{32 x_z}{\pi z_{go}} M_{z4} \cdot 1000} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3}{\pi \cdot 200} \cdot 12,9 \cdot 1000} = 12,21 \text{ [mm]}.$$

## Zadanie 2

Zaprojektować wał przekładni zębatej (schemat obciążenia i wymiary podane na szkicu).



Rys. 6.12. Schemat obciążenia wału. Zadanie 2

Źródło: opracowanie własne.

Dane:

$$F_x = 3500 \text{ [N]},$$

$$F_y = 10000 \text{ [N]},$$

$$F_z = 7500 \text{ [N]},$$

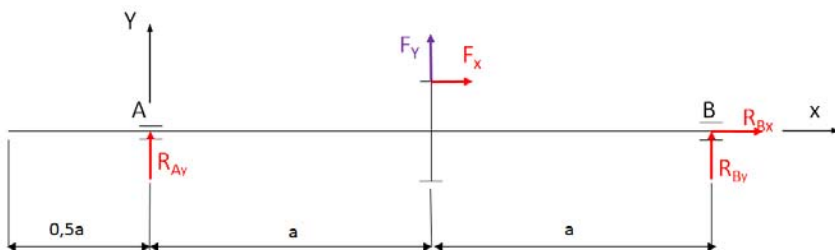
$$a = 150 \text{ [mm]},$$

$$d = 50 \text{ [mm]},$$

$$n = 1000 \text{ [obr/min]},$$

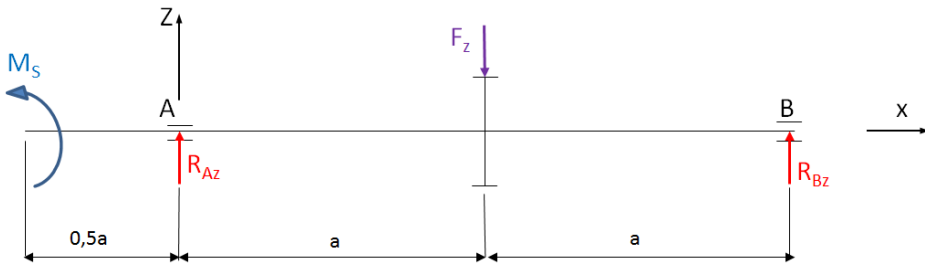
$$x_e = 3,$$

materiał wału – stal 35HGS.



Rys. 6.13. Schemat do wyznaczenia obciążeń w płaszczyźnie y-x. Zadanie 2

1. Na podstawie obciążeń wału w płaszczyźnie x-y i x-z wyznaczamy i zapisujemy równania równowagi układu:



Rys. 6.14. Schemat do wyznaczenia obciążeń w płaszczyźnie z-x. Zadanie 2

Źródło: opracowanie własne.

1.  $\sum F_{ix} = R_{Bx} + F_x = 0.$
2.  $\sum F_{iy} = R_{Ay} + F_y + R_{By} = 0.$
3.  $\sum F_{iz} = R_{Az} - F_z + R_{Bz} = 0.$
4.  $\sum M_{ix} = M_s - F_y \cdot \frac{d}{2} = 0.$
5.  $\sum M_{iy} = -F_z \cdot a + R_{Bz} \cdot 2a - F_x \cdot \frac{d}{2} = 0.$
6.  $\sum M_{iz} = F_y \cdot a + R_{By} \cdot 2a = 0.$

Z równania 1 wyznaczamy  $R_{Bx}$ :

$$R_{Bx} = -F_x,$$

$$R_{Bx} = -3500 \text{ [N]}.$$

Z równania 4 wyznaczamy  $M_s$ :

$$M_s = F_y \cdot \frac{d}{2},$$

$$M_s = 10000 \cdot \frac{50}{2} = 250000 \text{ Nmm} = 250 \text{ [Nm]}.$$

Z równania 5 wyznaczamy  $R_{Bz}$ :

$$R_{Bz} = \left( F_z \cdot a + F_x \cdot \frac{d}{2} \right) \cdot \frac{1}{2a},$$

$$R_{Bz} = \left( 7500 \cdot 150 + 3500 \cdot \frac{50}{2} \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot 150} = 4042 \text{ [N]}.$$

Z równania 3 wyznaczamy  $R_{Az}$ :

$$R_{Az} = F_z - R_{Bz},$$

$$R_{Az} = 7500 - 4042 = 3458 \text{ [N]}.$$

Z równania 6 wyznaczamy  $R_{By}$ :

$$R_{By} = \frac{-F_y \cdot a}{2 \cdot a},$$

$$R_{By} = \frac{-10000 \cdot 150}{2 \cdot 150} = -5000 \text{ [N]}.$$

Z równania 2 wyznaczamy  $R_{Ay}$ :

$$R_{Ay} = -F_y - R_{By},$$

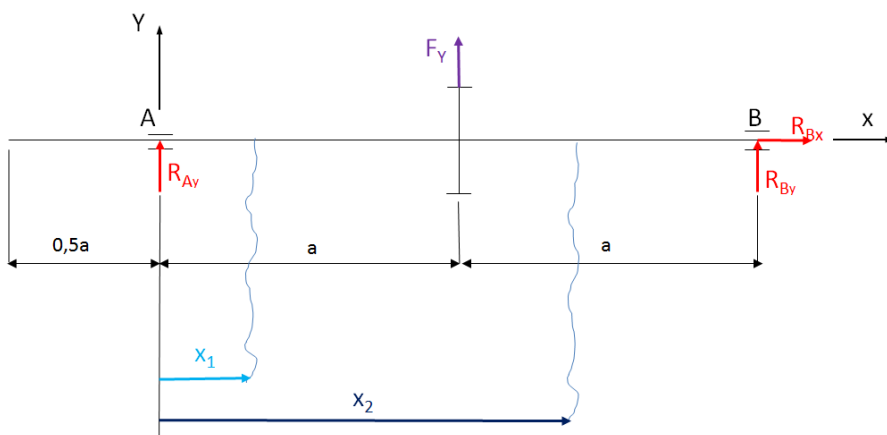
$$R_{Ay} = -10000 - (-5000) = -5000 \text{ [N]},$$

2. Wyznaczamy wypadkowe reakcje w łożyskach:

$$R_A = \sqrt{R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = \sqrt{(-5000)^2 + (3458)^2} = 6079 \text{ [N]},$$

$$R_B = \sqrt{R_{By}^2 + R_{Bz}^2} = \sqrt{(-5000)^2 + (4042)^2} = 6429 \text{ [N]}.$$

3. Wyznaczamy momenty gnące w charakterystycznych punktach wału w płaszczyźnie x-y:



Rys. 6.15. Szkic do wyznaczenia momentów gnących w płaszczyźnie y-x. Zadanie 2

Źródło: opracowanie własne.

$$0 \leq x_1 \leq a$$

$$M_{gxy} = R_{Ay} \cdot x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=a},$$

$$M_{gxy, x_1=0} = -5000 \cdot 0 = 0 \text{ [Nm]},$$

$$M_{gxy, x_1=a} = -5000 \cdot 150 = -750 \text{ [Nm]}.$$

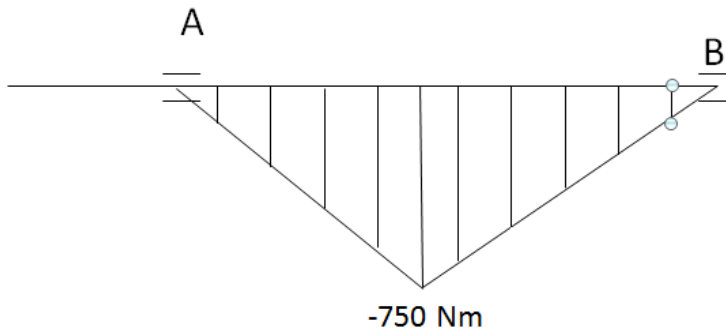
$$a \leq x_2 \leq 2a$$

$$M_{gxy} = R_{Ay} \cdot x_2 \Big|_{x_1=a}^{x_2=2a} + F_y \cdot (x_2 - a) \Big|_{x_2=a}^{x_2=2a},$$

$$M_{gxy, x_2=a} = -5000 \cdot 150 + 10000 \cdot (150 - 150) = -750 \text{ [Nm]},$$

$$M_{gxy, x_2=2a} = -5000 \cdot 2 \cdot 150 - 10000 \cdot (2 \cdot 150 - 150) = 0 \text{ [Nm]}.$$

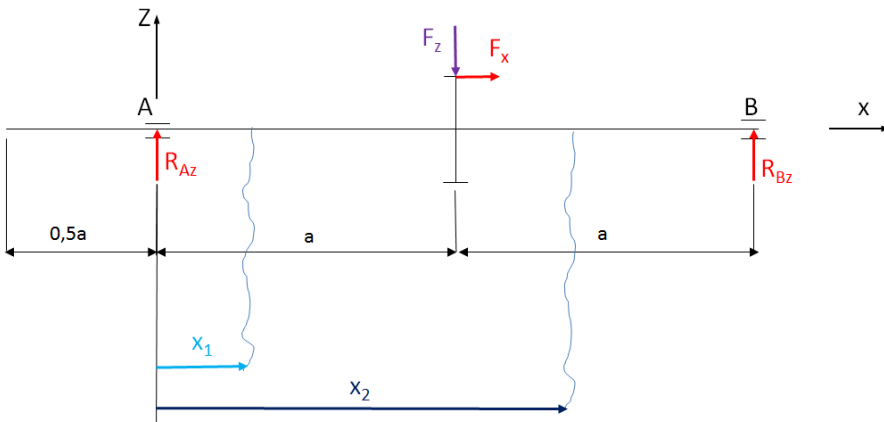
Wykres momentów gnących w płaszczyźnie x-y w charakterystycznych punktach wału:



Rys. 6.16. Wykres momentów gnących w płaszczyźnie y-x. Zadanie 2

Źródło: opracowanie własne.

4. Wyznaczamy momenty gnące w charakterystycznych punktach wału w płaszczyźnie x-z:



Rys. 6.17. Szkic do wyznaczenia momentów gnących w płaszczyźnie z-x. Zadanie 2

Źródło: opracowanie własne.



$$0 \leq x_1 \leq a$$

$$M_{gxz} = R_{Az} \cdot x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=a},$$

$$M_{gxz, x_1=0} = 3458 \cdot 0 = 0 \text{ [Nm]},$$

$$M_{gxz, x_1=a} = 3458 \cdot 150 = 518700 \text{ [Nmm]}.$$

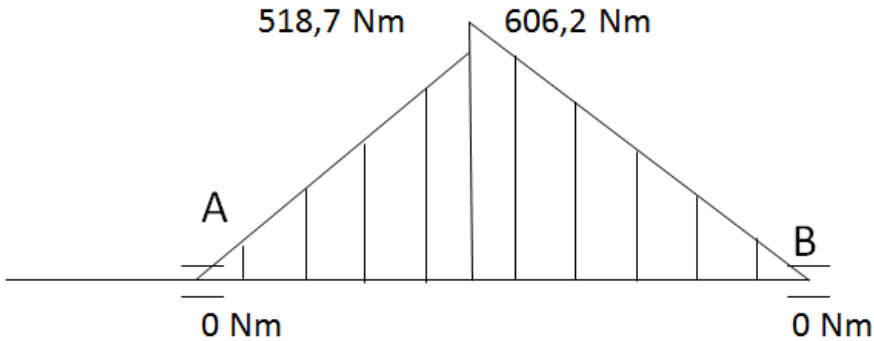
$$a \leq x_2 \leq 2a$$

$$M_{gxz} = F_x \cdot \frac{d}{2} + R_{Az} \cdot x_2 \Big|_{x_1=a}^{x_1=2a} - F_z \cdot (x_2 - a) \Big|_{x_1=a}^{x_1=2a},$$

$$M_{gxz, x_2=a} = 3500 \cdot \frac{50}{2} + 3458 \cdot 150 - 7500 \cdot (150 - 150) = 606200 \text{ [Nm]},$$

$$M_{gxz, x_2=2a} = 3500 \cdot \frac{50}{2} + 3458 \cdot 2 \cdot 150 - 7500 \cdot (2 \cdot 150 - 150) = 0 \text{ [Nm]}.$$

Wykres momentów gnących w płaszczyźnie x-z w charakterystycznych punktach wału:



Rys. 6.18. Wykres momentów gnących w płaszczyźnie z-x. Zadanie 2

Źródło: opracowanie własne.

5. Wypadkowe momentów gnących w charakterystycznych punktach wału:

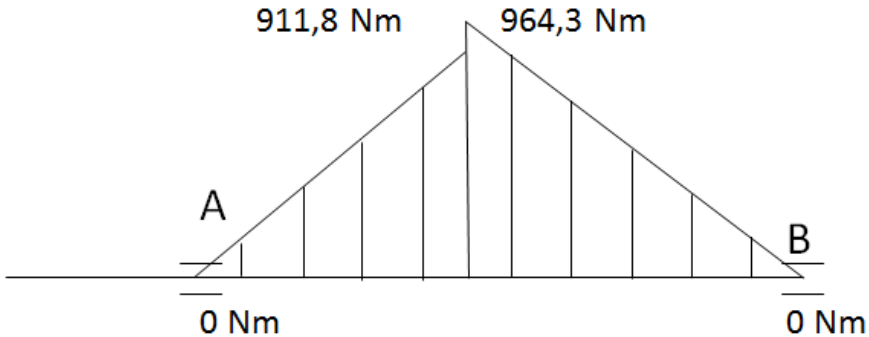
$$M_{g1} = \sqrt{M_{gxy1}^2 + M_{gxz1}^2} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2} = 0 \text{ [Nm]},$$

$$M_{g2} = \sqrt{M_{gxy2}^2 + M_{gxz2}^2} = \sqrt{(-750)^2 + (518,7)^2} = 911,8 \text{ [Nm]},$$

$$M_{g3} = \sqrt{M_{gxy3}^2 + M_{gxz3}^2} = \sqrt{(-750)^2 + (606,2)^2} = 964,3 \text{ [Nm]},$$

$$M_{g4} = \sqrt{M_{gxy4}^2 + M_{gxz4}^2} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2} = 0 \text{ [Nm]}.$$

Wykres wypadkowych momentów gnących w charakterystycznych punktach wału:

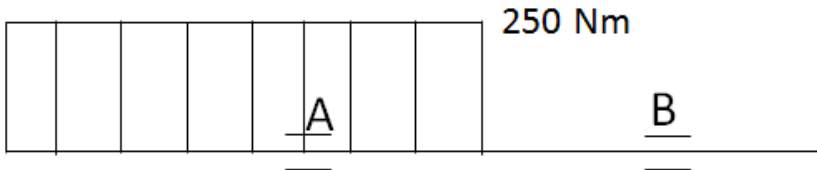


Rys. 6.19. Wykres wypadkowych momentów gnących. Zadanie 2  
Źródło: opracowanie własne.

6. Obliczamy moment skręcający  $M_s$ .

$$M_s = F_y \cdot r = F_y \cdot \frac{d}{2} = 10000 \cdot \frac{50}{2} = 250000 \text{ Nmm} = 250 \text{ [Nm]}.$$

Wykres obciążenia dla momentu skręcającego.



Rys. 6.20. Wykres momentu skręcającego. Zadanie 2  
Źródło: opracowanie własne.

7. Wyznaczamy moment zastępczy (zredukowany) w charakterystycznych punktach wału:

$$M_z = \sqrt{M_g + \left(\frac{\alpha}{2} \cdot M_s\right)^2},$$

$$\alpha = \frac{z_{go}}{z_{sj}} = \frac{200}{215} = 0,93$$

gdzie:  $z_{go}$  – wytrzymałość zmęczeniowa na zginanie (obciążenie zmiennie obustronnie tętniące),

$z_{sj}$  – wytrzymałość zmęczeniowa na skręcanie, (obciążenie zmiennie jednostronnie tętniące).

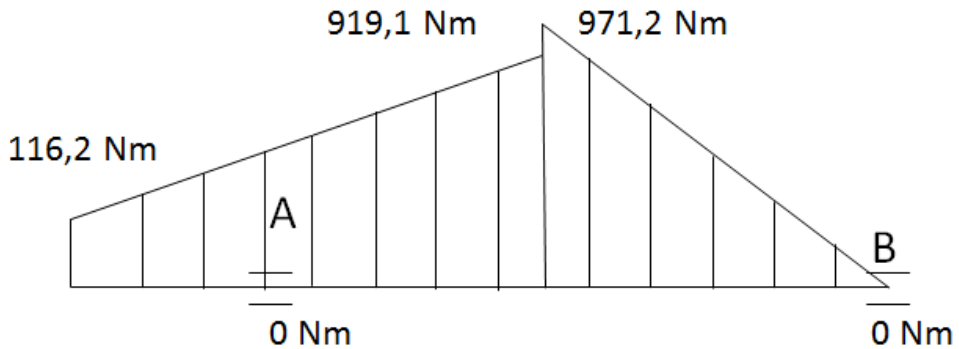
$$M_{z1} = \sqrt{M_{g1}^2 + \left(\frac{\alpha}{2} \cdot M_{s1}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + \left(\frac{0,93}{2} \cdot 250\right)^2} = 116,2 \text{ [Nm]},$$

$$M_{z2} = \sqrt{M_{g2}^2 + \left(\frac{\alpha}{2} \cdot M_{s2}\right)^2} = \sqrt{(911,8)^2 + \left(\frac{0,93}{2} \cdot 250\right)^2} = 919,1 \text{ [Nm]},$$

$$M_{z3} = \sqrt{M_{g3}^2 + \left(\frac{\alpha}{2} \cdot M_{s3}\right)^2} = \sqrt{(964,3)^2 + \left(\frac{0,93}{2} \cdot 250\right)^2} = 971,2 \text{ [Nm]},$$

$$M_{z4} = \sqrt{M_{g4}^2 + \left(\frac{\alpha}{2} \cdot M_{s4}\right)^2} = \sqrt{0 + \left(\frac{0,93}{2} \cdot 0\right)^2} = 0 \text{ [Nm]}.$$

Wykres momentu zredukowanego:



Rys. 6.21. Wykres momentu zredukowanego. Zadanie 2

Źródło: opracowanie własne.

8. Obliczamy wymaganą średnicę wału w kształcie paraboloidu obrotowego:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot x_z}{\pi \cdot z_{go}} \cdot M_z}$$

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{32x_z}{\pi z_{go}} M_{z1} \cdot 1000} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3}{\pi \cdot 200} \cdot 116,2 \cdot 1000} = 25,25 \text{ [mm]},$$

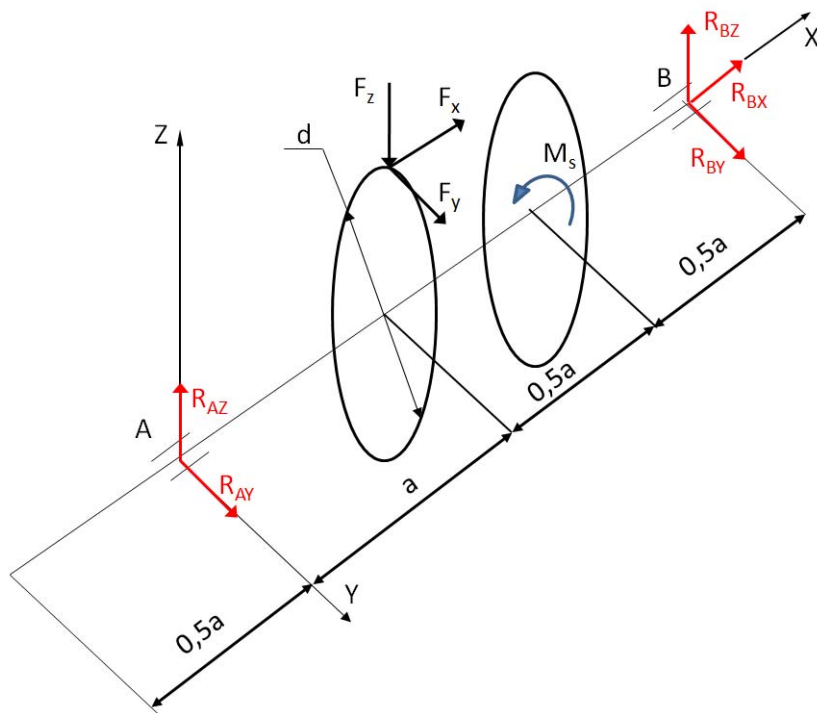
$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{32x_z}{\pi z_{go}} M_{z2} \cdot 1000} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3}{\pi \cdot 200} \cdot 919,1 \cdot 1000} = 49,97 \text{ [mm]},$$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{32x_z}{\pi z_{go}} M_{z3} \cdot 1000} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3}{\pi \cdot 200} \cdot 971,2 \cdot 1000} = 50,89 \text{ [mm]},$$

$$d_4 \geq \sqrt[3]{\frac{32x_z}{\pi z_{go}} M_{z4} \cdot 1000} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3}{\pi \cdot 200} \cdot 0 \cdot 1000} = 0 \text{ [mm]}.$$

## Zadanie do samodzielnego rozwiązania

Zaprojektować wał przekładni zębatej (schemat obciążenia i wymiary podane na szkicu).



Rys. 6.22. Schemat obciążenia wału. Zadanie do samodzielnego rozwiązania  
*Źródło: opracowanie własne.*

Dane:

$$F_x = 3000 [N],$$

$$F_y = 90000 [N],$$

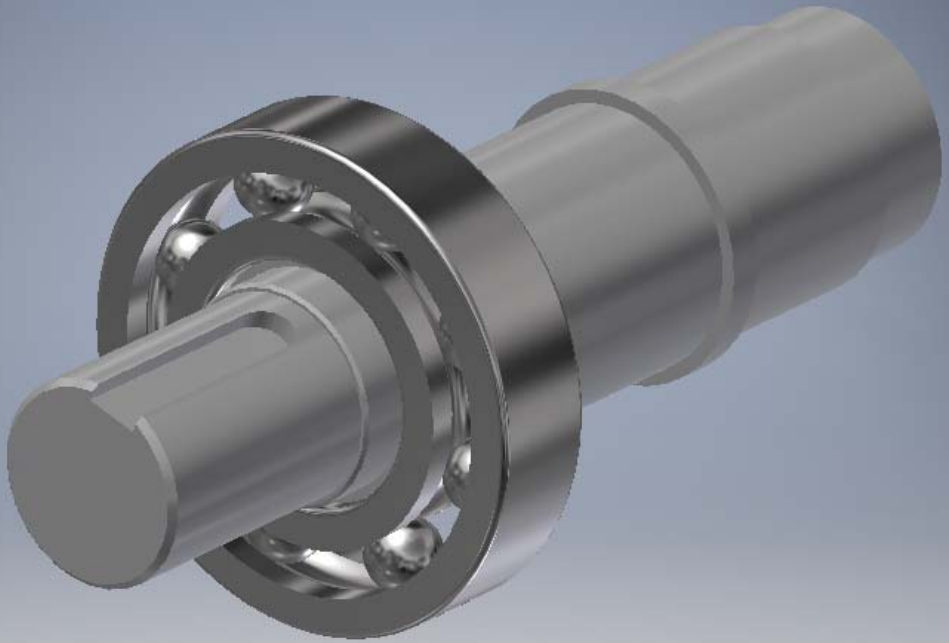
$$F_z = 6000 [N],$$

$$a = 100 [mm],$$

$$d = 50 [mm],$$

$$x_e = 3,$$

materiał wału – stal 35HGS.



# Rozdział 7

## ŁOŻYSKA TOCZNE

Opracowanie:

treści merytoryczne: dr inż. Andrzej Maciejczyk

zadania: dr inż. Marek Woźniak

## Nośność statyczna $C_0$

Nośność statyczna  $C_0$  – to takie obciążenie statyczne łożyska, które działając w nominalnym kierunku wywołuje między najbardziej obciążoną częścią toczną a bieżnią maksymalne naprężenie Herta o wartości:

$$\begin{aligned}\sigma_H &= 4000 \text{ MPa} && \text{dla łożysk wałeczkowych,} \\ \sigma_H &= 4600 \text{ MPa} && \text{dla łożysk kulkowych wahliwych,} \\ \sigma_H &= 4200 \text{ MPa} && \text{dla pozostałych łożysk kulkowych.}\end{aligned}$$

$$C_0 = s_0 P_0,$$

gdzie:  $P_0$  – obciążenie zastępcze spoczynkowe łożyska,  
 $s_0$  – współczynnik bezpieczeństwa obciążenia statycznego.

Tabela 7.1. Wartości współczynnika  $s_0$  [wg 11]

Charakter pracy	Wartość współczynnika $s_0$	
	Łożyska kulkowe	Łożyska wałeczkowe
spokojna bez drgań i wstrząsów	0,5	1,0
normalne	1,0	1,8
obciążenie udarowe	1,0÷1,5	1,8÷2,7
bardzo ciężka praca	2,0	3,5

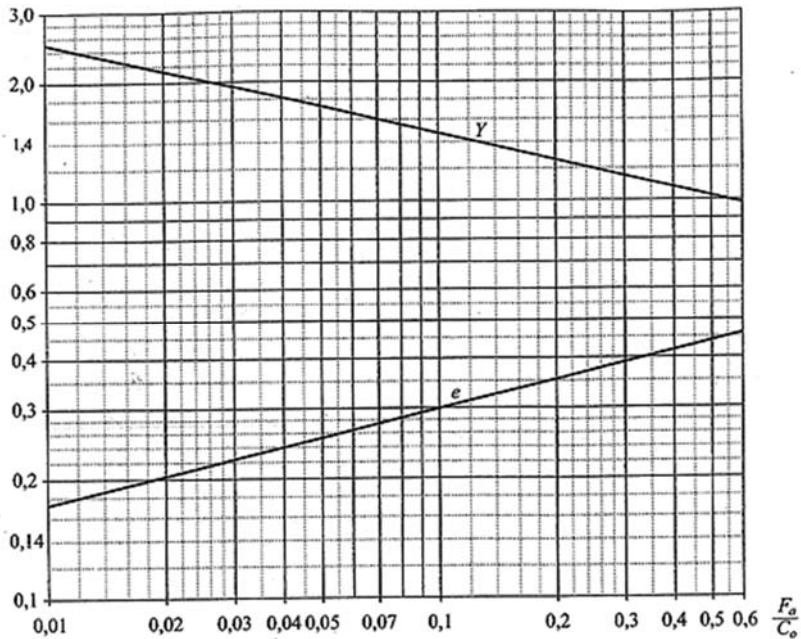
## Nośność dynamiczna $C$

Nośność dynamiczna  $C$  – obciążenie łożyska, które powoduje, że przy obracającym się pierścieniu wewnętrznym 90% łożysk z partii uzyskuje trwałość 1 mln obrotów.

## Obciążenie zastępcze ruchowe

$$F = XF_r + YF_a,$$

gdzie:  $F_r$  – obciążenie promieniowe łożyska,  
 $F_a$  – obciążenie osiowe łożyska,  
 $X$  – współczynnik obciążenia promieniowego,  
 $Y$  – współczynnik obciążenia osiowego.



Rys. 7.1. Wykres wartości  $e$  i  $Y$  dla łożysk kulkowych z luzem normalnym  
*Źródło: opracowanie własne.*

Tabela 7.2. Wartości  $e$  oraz  $X$  i  $Y$  dla różnych rodzajów łożysk [wg 8]

Rodzaj łożyska	Względne obciążenie osiowe $F_a/C_0$	$e$	Jeżeli $F_a/F_r < e$		Jeżeli $F_a/F_r > e$	
			$X$	$Y$	$X$	$Y$
Kulkowe zwykłe z luzem normalnym	0,014	0,19	1	0	0,56	2,30
	0,028	0,22				1,99
	0,056	0,26				1,71
	0,084	0,28				1,55
	0,110	0,30				1,45
	0,170	0,34				1,31
	0,280	0,38				1,15
	0,420	0,42				1,04
	0,520	0,44				1,00
Kulkowe skośne o kącie działania $\alpha = 40^\circ$		1,14	1	0	0,35	0,57
Stożkowe $\alpha = 15^\circ$		$1,5 \operatorname{tg} \alpha$	1	0	0,4	$0,4 \operatorname{ctg} \alpha$
Walcowe bez bieżni pomocniczej na jednym pierścieniu			$X = 1$		$Y = 0$	

## Trwałość zmęczeniowa łożysk (wzór Lundberga-Palmgrena)

$$L = \left(\frac{C}{F}\right)^p \text{ [mln obr.]}$$

Równanie zmodyfikowane:

$$L = a_1 a_2 a_3 \left(\frac{C}{F}\right)^p,$$

gdzie:  $a_1$  – współczynnik niezawodności,

$a_2$  – współczynnik materiałowy,

$a_3$  – współczynnik warunków pracy (smarowanie, czystość węzła – dobierany indywidualnie na podstawie danych katalogowych),

$a_1$  – współczynnik niezawodności wg tabeli 7.3.

Tabela 7.3. Wartości współczynnika niezawodności  $a_1$  [wg 11]

Niezawodność [%]	$a_1$
90	1
95	0,62
96	0,53
97	0,44
98	0,33
99	0,21

$a_2$  – współczynnik materiałowy:

$a_2 = 1$  dla materiałów klasycznych

$a_2 > 1$  dla materiałów specjalnych

## Trwałość godzinowa łożyska

$$L_h = \frac{10^h}{60 \cdot n} \left(\frac{C}{F}\right)^p \text{ [h]},$$

gdzie:  $n$  – prędkość obrotowa łożyska [obr./min].

## Nośność efektywna

$$C_e = f_t C,$$

$f_t$  – współczynnik temperaturowy.



Tabela 7.4. Wartości współczynnika temperaturowego [wg 11]

Temperatura pracy [°C]	Wartość współczynnika $f_t$
150	1,00
200	0,90
250	0,75
300	0,60

## Obciążenie efektywne

$$F_e = f_d C$$

$f_d$  – współczynnik obciążenia dynamicznego.

Tabela 7.5. Wartości współczynnika obciążenia dynamicznego  
[wg <http://www.pkm.edu.pl/index.php/lozyska/dobor/383-03010113>]

Ogólna budowa maszyn	$f_d$
Spokojna praca bez uderzeń	1
Spokojna praca z możliwością przeciążenia do 25% lub małymi wstrząsami, np. lekkie obrabiarki, transportery	1-1,2
Normalna praca z możliwością przeciążenia do 50% lub z wstrząsami i uderzeniami, np. średnie obrabiarki, lekkie dźwigy	1,2-1,8
Praca przy dużych obciążeniach z uderzeniami, np. ciężkie obrabiarki, małe walcarki, bębny czyszczące, haki dźwigów	1,8-2,5
Ciężka praca i duże uderzenia lub siły masowe, np. stoły walcarek, traki, łamacze kamienia i rudy	2,5-3,5

## Trwałość efektywna godzinowa

$$L_h = \frac{10^h}{60 \cdot n} \left( \frac{C_e}{F_e} \right)^p \quad [h].$$

## Obciążenie osiowe łożyska

(dotyczy łożysk wymagających napinania – łożyska skośne, stożkowe)

Obciążenie wewnętrzne łożyska:

$$S = \frac{F_a}{2Y} \quad [N].$$

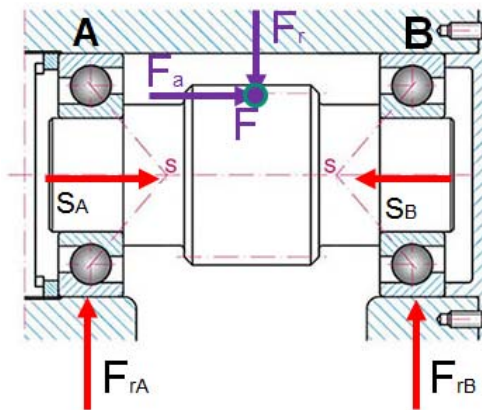
Wartość współczynnika Y w powyższym wyrażeniu zawsze dobieramy w oparciu o przypadek, gdy  $F_a/F_r > e$ .

Całkowite obciążenie osiowe łożysk:

- łożysko dociążone – wartość osiowego obciążenia łożyska stanowi wartość bezwzględna z sumy wektorowej obciążenia osiowego wału i obciążenia wewnętrznego w łożysku **odciążonym**,
- łożysko odciążone – wartość osiowego obciążenia łożyska stanowi wartość bezwzględna z jego obciążenia wewnętrznego.

## Zadanie 1

Obliczyć trwałość łożysk dla wałka pokazanego na szkicu oraz poniższych danych:

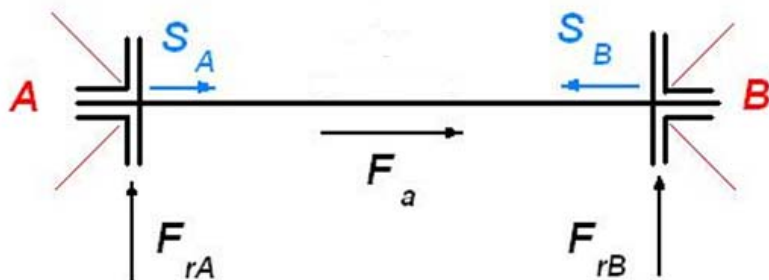


Rys. 7.2. Szkic obciążeń wału. Zadanie 1

Źródło: opracowanie własne.

	wspólne	A	B
$F_r$	1820 [N]		
$F_a$	880 [N]		
$F$	5000 [N]		
$F_r$		1729 [N]	3600 [N]
$n$	142 [obr./min]		
$f_d$		1,2	1,2
$f_t$		1	1
$a$		1	1
Typ łożyska	Kulkowe skośne	7204A	7305B
$c$		13300 [N]	24800 [N]
$c_0$		6656 [N]	1280 [N]
$e$	1,14		
$x$	0,35		
$y$	0,57		

Schemat obciążenia:



Rys. 7.3. Schemat obciążeń łożyskowania wału. Zadanie 1  
Źródło: opracowanie własne.

## Rozwiązanie

Układ łożyskowania typu „X”.

1. Wyznaczamy siły wewnętrzne w łożyskach:

$$S_A = \frac{F_{rA}}{2 \cdot y_A} = \frac{1729}{2 \cdot 0,57} = 1517 [N],$$

$$S_B = \frac{F_{rB}}{2 \cdot y_B} = \frac{3600}{2 \cdot 0,57} = 3158 [N].$$

2. Wyznaczamy sumę rzutów sił osiowych działających na wał:

$$\sum F_{ix} = S_A + F_a - S_B = 1517 + 880 - 3158 = -761 [N] < 0.$$

Dociążone jest łożysko A.

3. Wyznaczamy obciążenie wzdłużne łożysk:

$$F_{wA} = S_B - F_a = 3158 - 880 = 2278 [N],$$

$$F_{wB} = S_B = 3158 [N].$$

4. Wyznaczamy iloraz sił wzdłużnych do poprzecznych oraz na podstawie tabeli 7.2 określamy wartości współczynników obciążenia promieniowego  $x$  i obciążenia osiowego  $y$ :

$$\frac{F_{wA}}{F_{rA}} = \frac{2278}{1729} = 1,32 > e, \text{ zatem } x_A = 0,35 \text{ a } y_A = 0,57,$$

$$\frac{F_{wB}}{F_{rB}} = \frac{3158}{3600} = 0,87 \leq e, \text{ zatem } x_B = 1 \text{ a } y_B = 0.$$

5. Wyznaczamy obciążenie zastępcze łożysk:

$$F_A = x_A \cdot F_{rA} + y_A \cdot F_{wA} = 0,35 \cdot 1729 + 0,57 \cdot 2278 = 1903 [N],$$

$$F_B = x_B \cdot F_{rB} + y_B \cdot F_{wB} = 1 \cdot 3600 + 0 \cdot 3158 = 3600 [N].$$

6. Wyznaczamy obciążenie zastępcze efektywne łożysk:

$$F_{eA} = F_A \cdot f_d = 1903 \cdot 1,2 = 2284 \text{ [N]},$$

$$F_{eB} = F_B \cdot f_d = 3600 \cdot 1,2 = 4320 \text{ [N]}.$$

7. Wyznaczamy nośność ruchomą efektywną łożysk:

$$C_{eA} = C_A \cdot f_t = 13300 \cdot 1 = 13300 \text{ [N]},$$

$$C_{eB} = C_B \cdot f_t = 24800 \cdot 1 = 24800 \text{ [N]}.$$

8. Wyznaczamy wartość parametru a:

$$a = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

9. Wykładnik potęgi we wzorze Lundberga-Palmgrena dla łożysk kulkowych:

$$p = 3$$

10. Wyznaczamy trwałość zmęczeniową łożysk;

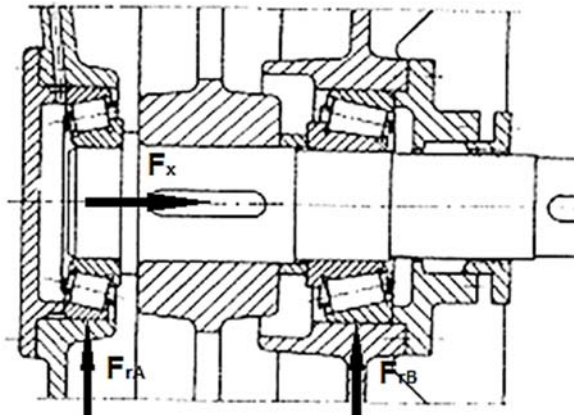
$$L_{hA} = \frac{10^6}{60 \cdot n} \cdot \left( \frac{C_{eA}}{F_{eA}} \right)^p \cdot a = \frac{10^6}{60 \cdot 1000} \cdot \left( \frac{13300}{2284} \right)^3 \cdot 1 = 3291 \text{ [h]},$$

$$L_{hB} = \frac{10^6}{60 \cdot n} \cdot \left( \frac{C_{eB}}{F_{eB}} \right)^p \cdot a = \frac{10^6}{60 \cdot 1000} \cdot \left( \frac{24800}{4320} \right)^3 \cdot 1 = 2612 \text{ [h]}.$$

Trwałość łożyskowania wału determinowana jest trwałością łożyska B.

## Zadanie 2

Obliczyć trwałość łożysk dla wałka pokazanego na szkicu oraz poniższych danych:



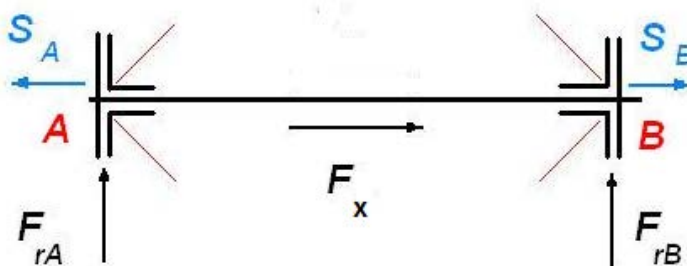
Rys. 7.4. Szkic obciążeń wału. Zadanie 2

Źródło: opracowanie własne.

Dane:

	wspólne	A	B
$F_x$	1820 [N]		
$F_r$		5330 [N]	6929 [N]
$n$	1000 [obr/min]		
$f_d$		1,5	1,5
$f_t$		1	1
$a$		1	1
Typ łożyska	stożkowe	30211	30211
$c$		90500 [N]	90500 [N]
$e$	0,4		
$x$	0,4		
$y$	1,48		

Schemat obciążenia:



Rys. 7.5. Schemat obciążeń łożyskowania wału. Zadanie 2

Źródło: opracowanie własne.

## Rozwiązanie

Mamy do czynienia z układem łożyskowania typu „X”

1. Wyznaczamy siły wewnętrzne w łożyskach;

$$S_A = \frac{F_{rA}}{2 \cdot y_A} = \frac{5330}{2 \cdot 1,48} = 1800,7 \text{ [N]},$$

$$S_B = \frac{F_{rB}}{2 \cdot y_B} = \frac{6929}{2 \cdot 1,48} = 2340,9 \text{ [N]}.$$

2. Wyznaczamy sumę rzutów sił osiowych działających na wał;

$$\sum F_{ix} = S_A + F_x - S_B = 1800,7 + 1900 - 2340,9 = 1359,8 \text{ [N]} > 0$$

Jak wynika z powyższej zależności wał spychany jest w prawo, zatem łożysko B jest dociążone oraz jest w nim kasowany luz, a łożysko A jest odciążone.

3. Wyznaczamy obciążenie wzdłużne łożysk:

Dla łożyska ze skasowanym luzem obciążenie wzdłużne jest sumą siły wzdłużnej przeciwległego łożyska i wzdłużnym obciążenia zewnętrznego, o ile posiadają one te same zwroty.

$$F_{wA} = S_A = 1800,7 \text{ [N]}$$

$$F_{wB} = S_A + F_x = 1800,7 + 1900 = 3700,7 \text{ [N]}$$

4. Wyznaczamy iloraz sił wzdłużnych do poprzecznych oraz określamy na podstawie tabeli 7.2 wartości współczynników  $x$  i  $y$ :

$$\frac{F_{wA}}{F_{rA}} = \frac{1800,7}{5330} = 0,338 < e, \text{ zatem } x_A = 1 \text{ a } y_A = 0,$$

$$\frac{F_{wB}}{F_{rB}} = \frac{3700,7}{6929} = 0,534 < e, \text{ zatem } x_B = 0,4 \text{ a } y_B = 1,48.$$

5. Wyznaczamy obciążenie zastępcze łożysk:

$$F_A = x_A \cdot F_{rA} + y_A \cdot F_{wA} = 1 \cdot 5330 + 0 \cdot 1800,7 = 5330 \text{ [N]},$$

$$F_B = x_B \cdot F_{rB} + y_B \cdot F_{wB} = 0,4 \cdot 6929 + 1,48 \cdot 3700,7 = 8248,6 \text{ [N]}.$$

6. Wyznaczamy obciążenie zastępcze efektywne łożysk:

$$F_{eA} = F_A \cdot f_d = 5330 \cdot 1,5 = 7995 \text{ [N]},$$

$$F_{eB} = F_B \cdot f_d = 8248,6 \cdot 1,5 = 12372,9 \text{ [N]}.$$

7. Wyznaczamy nośność ruchomą efektywną łożysk:

$$C_{eA} = C_A \cdot f_l = 90500 \cdot 1 = 90500 \text{ [N]},$$

$$C_{eB} = C_B \cdot f_l = 90500 \cdot 1 = 90500 \text{ [N]}.$$

8. Wyznaczamy wartość parametru  $a$ :

$$a = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

9. Wartość parametru wykładnika potęgowego dla łożysk stożkowych wynosi:

$$P = 10/3$$

10. Wyznaczamy trwałość zmęczeniową łożysk:

$$L_{hA} = \frac{10^6}{60 \cdot n} \cdot \left( \frac{C_{eA}}{F_{eA}} \right)^P \cdot a = \frac{10^6}{60 \cdot 1000} \cdot \left( \frac{90500}{7995} \right)^{\frac{10}{3}} \cdot 1 = 54276,9 \text{ [h]},$$

$$L_{hB} = \frac{10^6}{60 \cdot n} \cdot \left( \frac{C_{eB}}{F_{eB}} \right)^P \cdot a = \frac{10^6}{60 \cdot 1000} \cdot \left( \frac{90500}{12372,9} \right)^{\frac{10}{3}} \cdot 1 = 12660 \text{ [h]}.$$

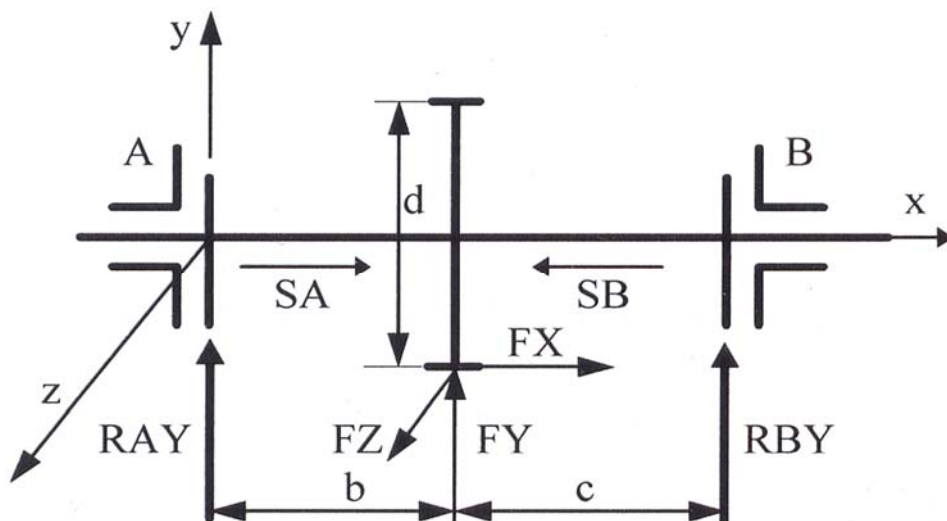
Trwałość łożyskowania wału determinowana jest trwałością łożyska B.

### Zadanie do samodzielnego rozwiązania:

Obliczyć trwałość zmęczeniową łożyskowania wałka dla poniższych danych. Schemat obciążenia na szkicu poniżej.

Dane:

	wspólne	A	B
$F_x$	400 [N]		
$F_y$	1600 [N]		
$F_z$	2600 [N]		
$n$	1500 [obr/min]		
$f_d$		1,2	1,2
$f_t$		1	1
$a$		1	1
$d$	68 [mm]		
$b$	100 [mm]		
$c$	120 [mm]		
Typ łożyska	Kulkowe skośne	7207B	7207B
$c$		27000 [N]	27000 [N]
$e$		1,14	1,14



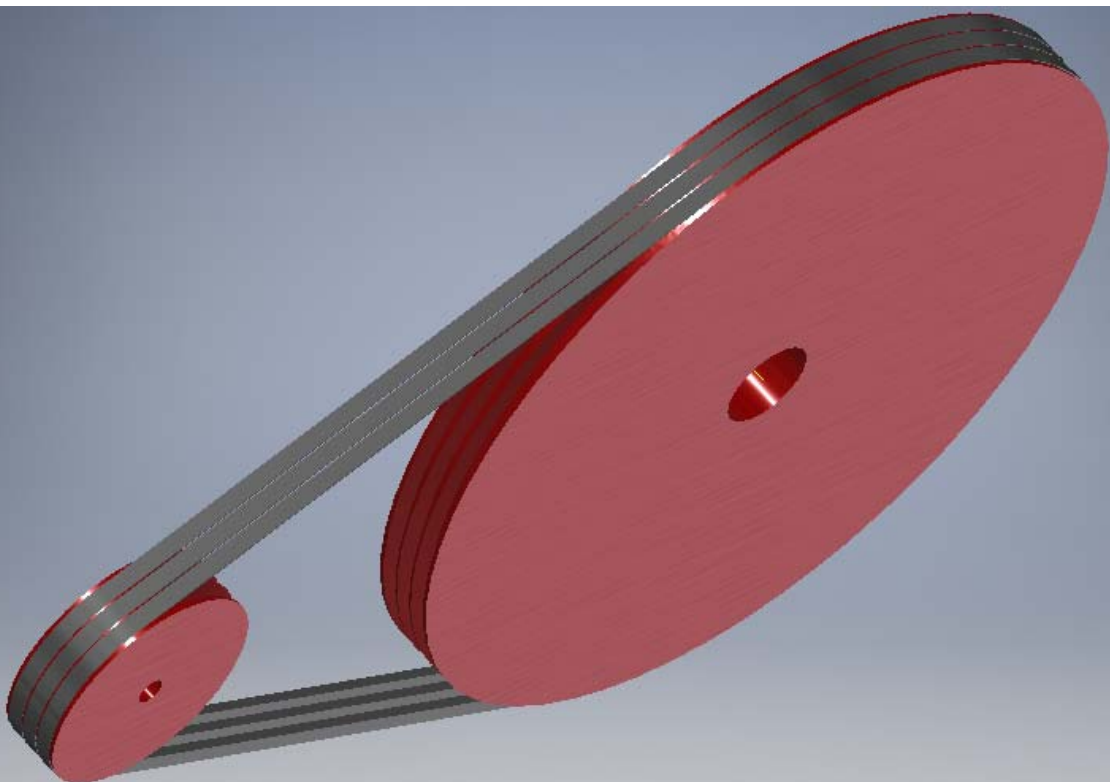
Rys. 7.6. Schemat obciążeń łożyskowanego wałka.

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

Źródło: opracowanie własne.







# Rozdział 8

## PRZEKŁADNIE Z PASAMI KLINOWYMI

Opracowanie:  
dr inż. Andrzej Michalak

Moc przenoszona przez przekładnię:

$$P = P_1 * Z \frac{k_L K_\varphi}{k_T},$$

stąd ilość pasów:

$$Z = \frac{P * k_T}{P_1 * k_L K_\varphi},$$

gdzie:  $P_1$  – moc przenoszona przez jeden pas w warunkach idealnych,

$k_L$  – współczynnik długości pasa,

$K_\varphi$  – współczynnik kąta opasania,

$k_T$  – współczynnik warunków i czasu pracy.

Moc obliczeniowa ( dla wstępnego wyboru przekroju pasa wg [9, 10] – rys. 8.2):

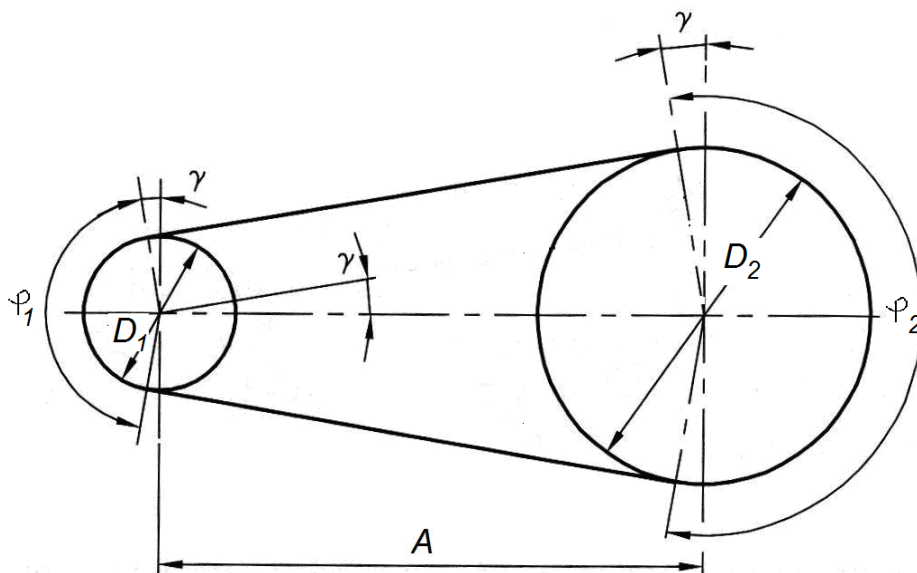
$$P_0 = P * k_T,$$

Średnica równoważna małego koła:

$$D_e = k_i D_1,$$

gdzie:  $D_1$  – średnica skuteczna małego koła,

$k_i$  – współczynnik przełożenia.



Rys. 8.1. Schemat przekładni pasowej

Źródło: opracowanie własne.

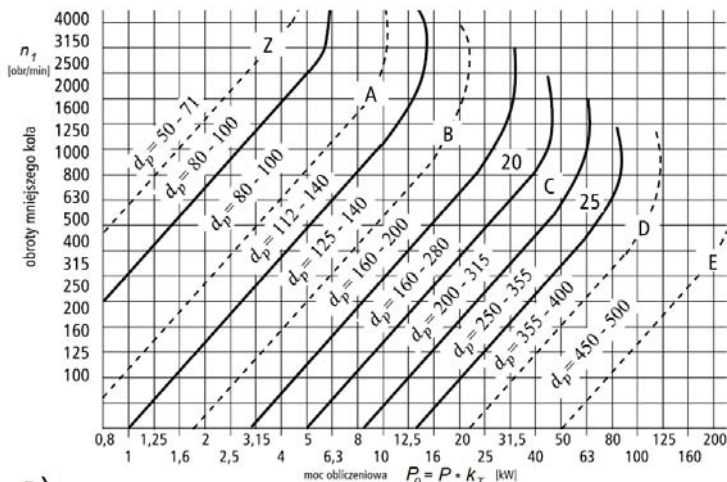
Długość pasa:

$$L = \pi \frac{D_2 + D_1}{2} + \pi \frac{\gamma^0}{180^\circ} (D_2 - D_1) + 2A \cos \gamma,$$

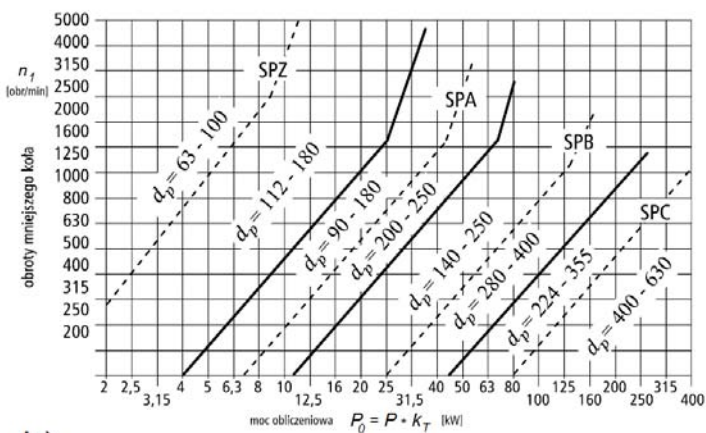
gdzie  $\gamma$  – kąt nachylenia cięgna,  $\sin \gamma = \frac{D_2 - D_1}{2A}$ .

Polecana wg PN odległość osi  $A$ :

$$\frac{D_2 + D_1}{2} + c \leq A \leq 2(D_2 + D_1), \quad c = 50 \text{ [mm]}.$$



a) Wykres wstępnego doboru wielkości przekroju pasa normarnoprofilowego

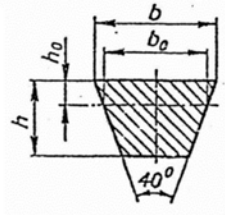


b) Wykres wstępnego doboru wielkości przekroju pasa wąskoprofilowego

Rys. 8.2. Wykresy wstępnego doboru wielkości przekroju pasów klinowych (wg [10])

Tabela 8.1. Wymiary pasów [wg PN-66/M-85201]

Przekrój pasa	b	h	b <sub>0</sub>	h <sub>0</sub>
Z	10	6	8,5	2
A	13	8	11	3
B	17	11	14	3,5
C	22	14	19	4,5
D	32	19	27	7
E	38	25	32	8



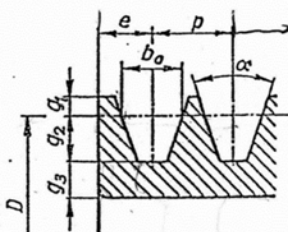
Długość L		Przekrój					
zalec.	niezalec.	Z	A	B	C	D	E
400							
	425						
450							
	475						
500							
	530						
560							
	600						
630							
	670						
710							
	750						
800							
	850						
900							
	950						
1000							
	1060						
1120							
	1180						
1250							
	1320						
1400							
	1500						
1600							
	1700						
1800							
	1900						
2000							
	2120						
2240							
	2360						
2500							
	2650						
$\frac{\Delta L}{L}$	%	1,1	1,0	0,9	0,8	0,6	0,5

Długość L		Przekrój					
zalec.	niezalec.	Z	A	B	C	D	E
	2650						
2800							
	3000						
3150							
	3350						
3550							
	3750						
4000							
	4250						
4500							
	4750						
5000							
	5300						
5600							
	6000						
6300							
	6700						
7100							
	7500						
8000							
	8500						
9000							
	9500						
10000							
	10600						
11200							
	11800						
12500							
	13200						
14000							
	15000						
16000							
	17000						
18000							
$\Delta L$	— przybliżone wydłużenie pasa dla wymaganego napięcia wstępnego (nie objęte normą)						

Przykłady oznaczenia: Pas klinowy B1250 PN-66/M-85201  
Zespół pasów klinowych 3B1250 PN-66/M-85201

Tabela 8.2. Wymiary kół pasowych [wg PN-66/M-85202]

Przekrój pasa	$b_0$	$p$	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3^{*)}$
Z	8,5	$12 \pm 0,3$	$8 \pm 1$	$\geq 2,5$	$\geq 7$	5...6
A	11	$15 \pm 0,3$	$10 \pm 1$	$\geq 3,3$	$\geq 8,7$	6...7
B	14	$19 \pm 0,4$	$12,5 \pm 1$	$\geq 4,2$	$\geq 10,8$	7...8
C	19	$25,5 \pm 0,5$	$17 \pm 1$	$\geq 5,7$	$\geq 14,3$	8
D	27	$37 \pm 0,6$	$24 \pm 1$	$\geq 8,1$	$\geq 19,9$	9
E	32	$44,5 \pm 0,7$	$29 \pm 1$	$\geq 9,6$	$\geq 23,4$	10



\*) nie objęte normą

Średn. koła D		Kąt $\alpha$ dla przekroju pasa					
zalec.	niezalec.	Z	A	B	C	D	E
63							
	67	$34^\circ$					
	71	$\pm 1^\circ$					
	75						
	80						
	85						
	90	$36^\circ$					
	95	$\pm 1^\circ$					
	100		$34^\circ$				
	105		$\pm 1^\circ$				
	112						
	118						
	125						
	132						
	140			$34^\circ$			
	150		$36^\circ$	$\pm 1^\circ$			
	160		$\pm 1^\circ$				
	170	$36^\circ$					
	180	$\pm 1^\circ$					
	190						
	200						
	212				$36^\circ$		
	224				$\pm 1^\circ$		
	236						
	250					$36^\circ$	
	255					$\pm 30'$	
	280						
	300	$38^\circ$					
	315	$\pm 1^\circ$					
	335						
	355				$38^\circ$		
	375				$\pm 1^\circ$		
	400					$36^\circ$	
						$\pm 30'$	

Średn. koła D		Kąt $\alpha$ dla przekroju pasa					
zalec.	niezalec.	Z	A	B	C	D	E
400							
	425						
	450						$36^\circ$
	475						$\pm 30'$
	500						
	530						
	560		$38^\circ$				$36^\circ$
	600		$\pm 1^\circ$				$\pm 50'$
	630						
	670						
	710						
	750						
	800						
	850						
	900						
	950						
	1000						
	1060						
	1120						
	1180						
	1250						
	1320						
	1400						
	1500						
	1600						
	1700						
	1800						
	1900						
	2000						
	2120						
	2240						
	2360						
	2500						

Tabela 8.3a. Moc  $P_1$  przenoszona przez jeden pas [9]

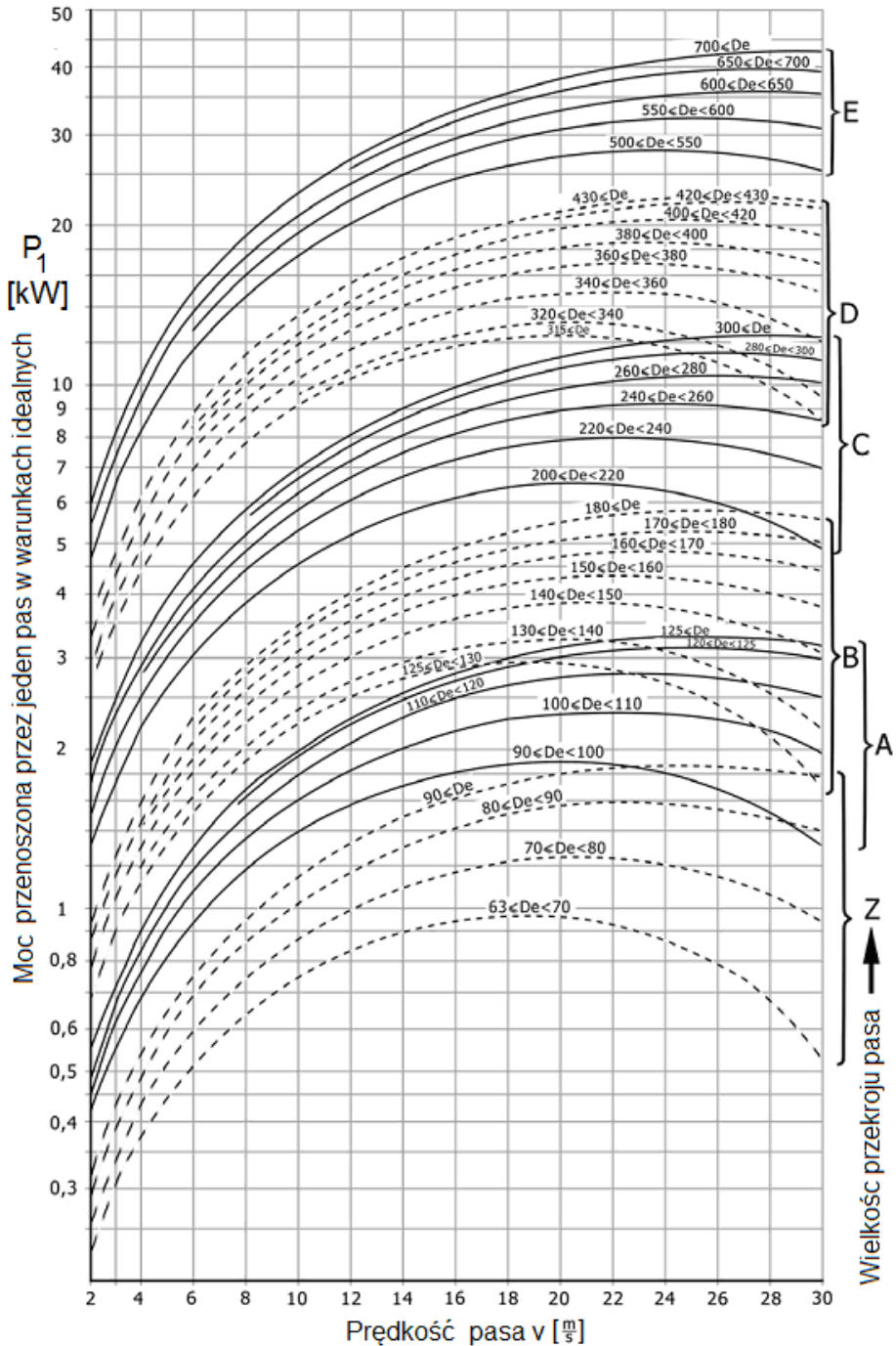


Tabela 8.3b. Współczynnik przełożenia  $k_i$  [9]

$i$	$\leq 0,55$	$0,56 \dots 0,83$	$0,84 \dots 0,95$	$0,95 \dots 1,05$
	$> 1,80$	$1,21 \dots 1,80$	$1,06 \dots 1,20$	
$k_L$	1,15	1,10	1,05	1,00

Tabela 8.3c. Współczynnik długości pasa  $k_L$  [9]

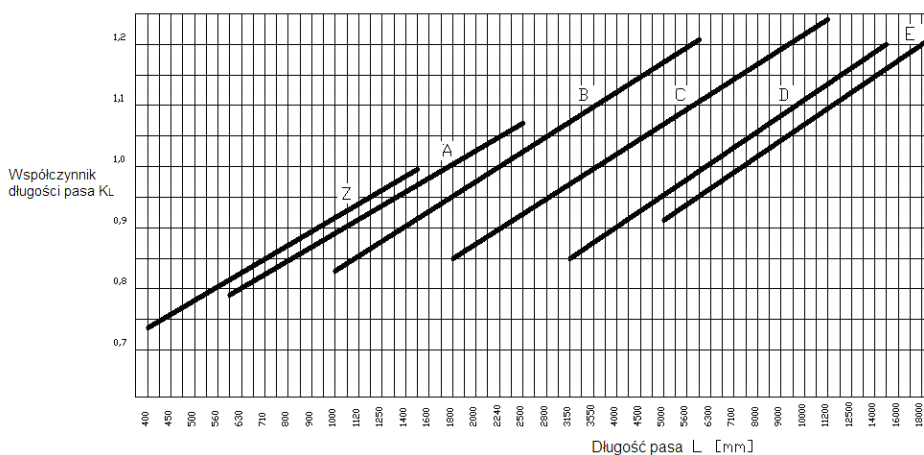


Tabela 8.3d. Współczynnik kąta opasania  $k_\phi$  [9]

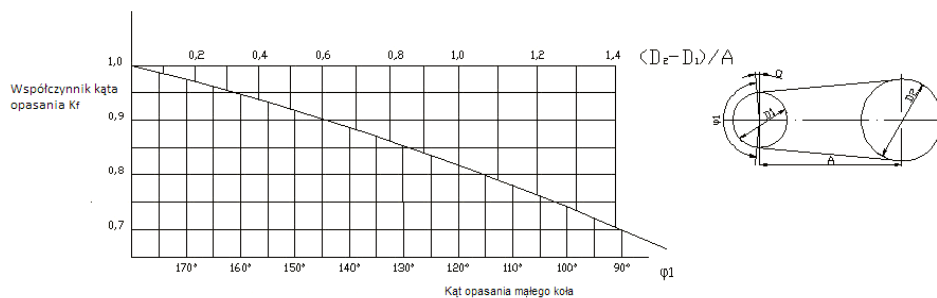


Tabela 8.3e. Współczynnik warunków i czasu pracy  $k_T$  [9]

Urządzenie napędzane	Warunki pracy			
	L	S	C	BC
Dmuchawy	♀			
Dmuchawy wyporowe			♀	
Dźwigi				♀
Kruszarki				♀
Maszyny cegielniane			♀	
Maszyny włókiennicze			♀	
Mieszalniki cieczy	♀			
Młyny kulowe, prętowe, rurowe				♀
Młyny młotkowe			♀	
Obrabiarki do drewna			♀	
Obrabiarki do metali		♀		
Pędnie		♀		
Pity tartaczne			♀	
Podnośniki				♀
Pompy odśrodkowe	♀			
Pompy tłokowe 1-i 2-cylindr.			♀	
Pompy tłokowe 3-i więcej cyl.		♀		
Pralki		♀		
Prasy		♀		
Prądnice		♀		
Przenośniki kubetkowe			♀	
Przenośniki taśmowe		♀		
Przenośniki typu lekkiego	♀			
Sita obrotowe i wibracyjne		♀		
Sprężarki	jak pompy			
Wentylatory do 7,5 kW	♀			
Wentylatory ponad 7,5 kW		♀		
Wyciągi	♀			

Warunki pracy:

- L - lekkie:  
obciążenie równomierne
- S - średnie:  
przeciążenia do 50%
- C - ciężkie:  
przeciążenia do 100%
- BC - bardzo ciężkie:  
przeciążenia ponad 100%

Liczba godz. pracy na dobę	Wartości $k_T$				Silnik
	1,0	1,1	1,2	1,3	
≤ 10	1,0	1,1	1,2	1,3	Elektryczny trójfazowy z przetącz. $\Delta/\lambda$ lub rozrusznikiem; jednofazowy prądu stałego bocznikowy;
10 ... 16	1,1	1,2	1,3	1,4	
> 16	1,2	1,3	1,4	1,5	
≤ 10	1,1	1,2	1,3	1,4	Elektryczny o dużym momencie rozruch.; prądu stałego bocznikowo-szeregowy;
10 ... 16	1,2	1,3	1,4	1,5	
> 16	1,3	1,4	1,5	1,6	
≤ 10	1,2	1,3	1,4	1,5	Elektryczny krótkozwarty lub 2-klatkowy; prądu stałego szeregowy
10 ... 16	1,3	1,4	1,5	1,6	
> 16	1,4	1,5	1,6	1,8	
≤ 10	1,2	1,3	1,4	1,5	Niezależnie od rodzaju silnika, gdy koto pasowe jest tarcza, sprzęgła lub gdy jest blisko sprzęgła
10 ... 16	1,3	1,4	1,5	1,6	
> 16	1,4	1,5	1,6	1,8	



## Zadanie 1

Zaprojektować przekładnię z pasami klinowymi dla następujących danych:

moc przekładni  $P = 7,5$  [kW],

obroty koła napędzającego  $n_1 = 965$  [obr./min],

obroty koła napędzanego  $n_2 = 275$  [obr./min] (tolerancja przełożenia  $\pm 2\%$ ),

Rozstaw osi  $A \leq 1000$  [mm],

warunki pracy: lekkie,

maszyna napędzająca: silnik elektryczny trójfazowy,

liczba godzin pracy na dobę: 8.

Zaprojektowanie przekładni polega na obliczeniu (ustaleniu) jej głównych parametrów: rozstawu osi, wielkości przekroju poprzecznego i długości pasów, liczby pasów, średnic skutecznych i szerokości kół pasowych.

### Dobór długości pasów

#### 1. Przekrój pasa

Przyjmujemy wstępnie do obliczeń przekrój pasa, korzystając z materiałów zamieszczonych w [10]. Zakładamy zastosowanie pasów normalnoprofilowych z uwagi na możliwie najmniejsze wymiary kół i zwartość przekładni.

- #### 2. Obliczamy moc $P_0$ mnożąc moc $P$ przez współczynnik warunków i czasu pracy $k_L$ (tabela 8.3e). Następnie posługując się wykresem (rys. 8.2a) odczytujemy, że dla danych parametrów przekładni (moc, warunki pracy, prędkość obrotowa małego koła, maszyna napędzająca) sugerowany przekrój pasa to A. Jednak punkt znaleziony na wykresie leży w pobliżu zakresu pasa B. Wobec powyższego obliczenia przeprowadzimy równolegle dla tych dwóch przekrojów pasów i końcową decyzję co do wyboru konkretnego pasa uzależnimy od obliczonej wymaganej ilości pasów jednego i drugiego przekroju.

#### 3. Przełożenie kinematyczne przekładni:

$$i = n_1 / n_2 = 965 / 275 = 3,51.$$

#### 4. Średnica skuteczna małego koła wg PN.

Dla zwartości przekładni przyjmujemy średnice minimalne z zakresu podanego w tabela 8.2:

dla pasa (A) 90 [mm], dla pasa (B) 160 [mm].

- #### 5. Średnice te są dopuszczalne dla pasów normalnoprofilowych, gdyby stosować pasy wąskoprofilowe musiałyby one być większe.

6. Obliczeniowa średnica dużego koła:

$$D_2 = i \times D_1; \text{ dla (A): } 315,9 \text{ [mm]}; \text{ dla (B): } 561,6 \text{ [mm]}.$$

7. Przyjęta średnica skuteczna dużego koła wg PN.

Korzystając z tabeli 8.2 znajdujemy średnice zalecane, najbliższe obliczeniowym: dla (A): 315 [mm]; dla (B): 560 [mm].

8. Rzeczywiste przełożenie (geometryczne):

dla (A): 3,5; dla (B): 3,5 – w granicach zadanej tolerancji.

9. Graniczne wartości rozstawu osi zgodnie z PN:

maksymalna  $A_{\max} \leq 2(D_2 + D_1)$ ; dla (A): 810 [mm]; dla (B): 1440 [mm],

minimalna  $A_{\min} \geq 0,5(D_2 + D_1) + 50$  [mm]; dla (A): 252,5 [mm];

dla (B): 410 [mm].

10. Wstępny rozstaw osi  $A_w$ .

Dobieramy rozstaw osi kierując się kryterium korzystniejszej pracy przekładni przy możliwie maksymalnej jej wartości.

$A_{\min} \leq A_w \leq A_{\max}$ , przyjmujemy:

dla (A): 810 [mm] – maksymalną z zalecanego normą zakresu,

dla (B): 1000 [mm] – maksymalną, wynikającą z ograniczenia konstrukcyjnego (dane zadania).

11. Wstępnie obliczony kąt nachylenia cięgna  $\gamma_w$ :

$$\gamma_w = \frac{\arcsin(D_2 - D_1)}{2A_w},$$

dla (A):

$$\sin \gamma_w = \frac{D_2 - D_1}{2A_w} = \frac{315 - 90}{2(810)} = \frac{225}{1620} = 0,139 \rightarrow \gamma_w = 7,984^\circ,$$

dla (B):

$$\sin \gamma_w = \frac{D_2 - D_1}{2A_w} = \frac{560 - 160}{2(1000)} = \frac{400}{2000} = 0,2 \rightarrow \gamma_w = 11,537^\circ.$$

12. Obliczeniowa długość pasa  $L_{obl}$

$$L_{obl} = \pi \frac{D_2 + D_1}{2} + \pi \frac{\gamma^\circ}{180^\circ} (D_2 - D_1) + 2A_w \cos \gamma_w,$$

dla (A):

$$L_{obl} = \pi \frac{315+90}{2} + \pi \frac{7,984^0}{180^0} (315 - 90) + 2(810)\cos 7,984^0 = 2271 \text{ mm},$$

dla (B):

$$L_{obl} = \pi \frac{560 + 160}{2} + \pi \frac{11,537^0}{180^0} (560 - 160) + 2(1000)\cos 11,537^0 = 3171 \text{ mm}.$$

13. Długość pasa wg PN

Z tabeli 8.1 dobieramy długość pasa z szeregu długości wytwarzanych, najbliższą długości obliczeniowej:

dla (A): 2240 [mm], dla (B): 3150 [mm]. Podczas montażu długość ta ulega zwiększeniu wskutek wymaganego napięcia wstępnego, dla (A) o 1%, dla (B) o 0,9% (tabela 8.1), zwiększa się wtedy również rozstaw osi.

14. Przybliżony rozstaw osi (dla przyjętej z norm długości pasa):

$$A_p = \frac{1}{2} \left[ L - \frac{\pi}{180^0} (D_2 - D_1) \right],$$

$$\text{dla (A): } A_p = \frac{1}{2} \left[ 2271 - \frac{\pi}{180^0} (315 + 90) \right] = 801,9 \text{ mm},$$

$$\text{dla (B): } A_p = \frac{1}{2} \left[ 3171 - \frac{\pi}{180^0} (560 + 160) \right] = 1009,5 \text{ mm}.$$

15. Kąt nachylenia cięgna  $\gamma$ :

dla(A):

$$\sin \gamma = \frac{D_2 - D_1}{2A_p} = \frac{315 - 90}{2(801,9)} = \frac{225}{1603,8} = 0,1403 \rightarrow \gamma = 8,065^0,$$

dla(B):

$$\sin \gamma = \frac{D_2 - D_1}{2A_p} = \frac{560 - 160}{2(1009,5)} = \frac{400}{2019} = 0,1981 \rightarrow \gamma = 11,427^0.$$

16. Obliczeniowy rozstaw osi

$$A = \frac{1}{2\cos \gamma} \left[ L - \frac{\pi}{2} (D_2 + D_1) - \pi \frac{\gamma}{180} (D_2 - D_1) \right],$$

dla (A):

$$A = \frac{1}{2\cos 8,065^0} \left[ 2240 - \frac{\pi}{2} (315 + 90) - \pi \frac{8,065^0}{180} (315 - 90) \right] = 793,9 \text{ mm},$$

dla (B):

$$A = \frac{1}{2\cos 11,427^0} \left[ 3150 - \frac{\pi}{2} (560 + 90) - \pi \frac{11,427^0}{180} (560 - 160) \right] = 989,2 \text{ mm}$$

## Dobór liczby pasów

1. Współczynnik przełożenia:

z tabl. 8.3b:  $k_i = f(u)$ , znajdujemy dla (A): 1,15 i dla (B): 1,15

2. Średnica równoważna małego koła:

$$D_e = k_i D_1;$$

dla (A): 103,5 mm, dla (B): 184 mm

3. Prędkość pasa obliczamy ze wzoru

$$v = \frac{\pi D_1 n_1}{60},$$

dla (A):  $v = \frac{\pi \cdot 0,090 \cdot 965}{60} = 4,55 \text{ m/s}$ ,

dla (B):  $v = \frac{\pi \cdot 0,160 \cdot 965}{60} = 8,08 \text{ m/s}$ .

4. Moc przenoszona przez jeden pas:

z tabeli 8.3a:  $P_1 = f(v, D_e, \text{przekrój pasa})$ , znajdujemy dla (A): 0,86 [kW],  
dla (B): 2,9 [kW].

5. Współczynnik długości pasa:

Z tabeli 8.3c:  $k_L = f(L, \text{przekrój pasa})$  znajdujemy dla (A): 1,06; dla  
(B): 1,07

6. Kąt opasania małego koła:

w stopniach:

$$\varphi_1 = 180 - 2\gamma,$$

dla (A):  $180 - 16,13 = 163,87^\circ$ ,

dla (B):  $180 - 22,854 = 157,146^\circ$

w radianach:

$$\varphi_{1r} = \pi \varphi_1 / 180,$$

dla (A): 2,86;

dla (B): 2,74

7. Współczynnik kąta opasania:

z tabeli 8.3d:  $k_\varphi = f(\varphi_{1r})$ , odczytujemy dla (A): 0,97; dla (B): 0,95.

8. Współczynnik warunków i czasu pracy:

z tabeli 8.3e:

$k_T = f(\text{warunki pracy, czas pracy na dobę, maszyna napędzająca - silnik})$   
znajdujemy

dla (A): 1; dla (B): 1.

9. Obliczeniowa liczba pasów:  
wg wzoru:

$$z = \frac{P \cdot k_t}{P_0 \cdot k_t \cdot k_\varphi},$$

obliczamy:

$$\text{dla (A): } z = \frac{7,5 \cdot 1}{0,86 \cdot 1,06 \cdot 0,97} = 8,48,$$

$$\text{dla (B): } z = \frac{7,5 \cdot 1}{2,9 \cdot 1,07 \cdot 0,95} = 2,54.$$

10. Całkowita liczba pasów dla (A): **9**; dla (B): **3**.

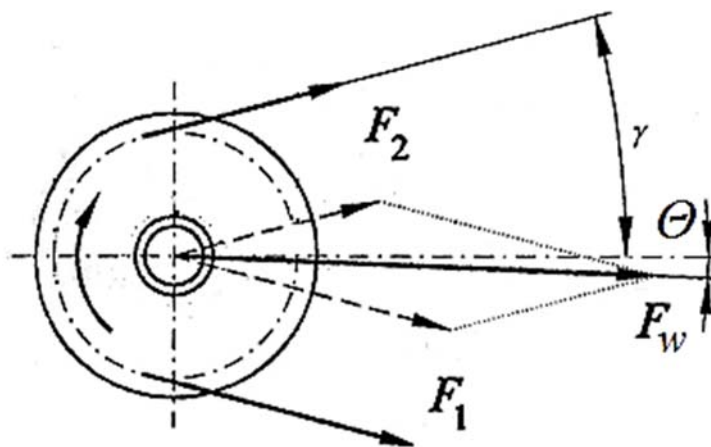
## Podsumowanie zadania projektowego

Ostatecznie przyjmujemy dla przekładni wariant z mniejszą liczbą pasów, czyli trzy pasy o przekroju *B* i długości 3150 [mm]. Pozostałe parametry przekładni: rozstaw osi 989,2 [mm] (z możliwością przesuwu silnika dla uzyskania wymaganego napięcia wstępnego), średnica skuteczna małego koła 160 [mm], średnica skuteczna dużego koła 500 [mm]. Szerokość wieńców kół pasowych *B* dla przyjętego przekroju pasa (B) obliczamy na podstawie tabeli 8.2.

$$B = (z - 1) \cdot p + 2e = (3 - 1) \cdot 19 + 2 \cdot 12,5 = 63 \text{ mm}.$$

## Zadanie 2

Dla zaprojektowanej przekładni (zad. 1) obliczyć obciążenie poprzeczne  $F_w$  wałów i kąt odchylenia  $\Theta$  wektora obciążenia od osi przekładni.



Rys. 8.3. Schemat obciążenia koła napędowego przekładni paskowej  
Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie danych z literatury przyjmujemy sprawność przekładni  $\eta$  dla przekładni pasowej z pasami klinowymi: 0,95.

Podobnie współczynnik tarcia  $\mu$  między kołem a pasem przyjmujemy 0,25.

Kąt  $\alpha$  rozchylenia ścianek rowka na kole pasowym dla pasa typu B wynosi  $34^\circ$  (tabeli 8.2).

1. Pozorny współczynnik tarcia (z kół rowkowych – a nie walcowych, jak w przypadku pasów płaskich – powierzchni styku pasa z kołem):

$$\mu = \frac{\mu}{\sin(\alpha/2)} = \frac{0,25}{\sin(17^\circ)} = 0,86$$

2. Napięcie użyteczne (liczone z przenoszonej mocy):

$$F_u = \frac{P * \eta}{v} = \frac{7,5 * 0,95}{8,08} = 0,881 \text{ kN}.$$

3. Współczynnik z wzoru Eulera, relacja między napięciem ciągną czynnego i biernego dla sprzężenia ciernego:

$$m = \frac{F_1}{F_2} = e^{\mu\alpha} = 10,55.$$

4. Napięcie wstępne, wymagane dla uzyskania sprzężenia ciernego zdolnego przenieść moc zadaną:

$$F_0 = \frac{F_u}{2} * \frac{m + 1}{m - 1} = \frac{0,44 * 11,55}{9,55} = 0,533 \text{ kN}.$$

5. Napięcie w pasie nabiegającym na koło napędzające (ciągną czynne):

$$F_1 = F_0 + 0,5F_u = 0,533 + 0,44 = 0,973 \text{ kN}.$$

6. Napięcie w pasie zbiegającym z koła napędzającego (ciągną biernie):

$$F_2 = F_0 - 0,5F_u = 0,533 - 0,44 = 0,093 \text{ kN}.$$

7. Obciążenie poprzeczne wału (i łożysk):

$$F_w = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 2\gamma} = \sqrt{0,973^2 + 0,093^2 + 2 * 0,973 * 0,093\cos 2 * 11,427} = 1,06 \text{ kN}.$$

8. Kąt odchylenia wektora obciążenia wału od osi przekładni:

$$\theta = \arctg\left(\frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} * \operatorname{tg} \gamma\right) = \arctg\left(\frac{(0,973 - 0,093) * \operatorname{tg} 11,427^\circ}{0,973 + 0,093}\right) = 9,47^\circ.$$

## Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zaprojektować przekładnię z pasami klinowymi dla danych zawartych w tabeli poniżej:

$P$  [kW] – moc przenoszona

$n_1$  [obr./min] – prędkość obrotowa silnika (maszyny napędzającej),

$n_2$  [obr./min] – prędkość obrotowa maszyny napędzanej,

$t$  [godz./dobę] – dobowy czas pracy przekładni,

warunki pracy

L (lekkie – obciążenie równomierne),

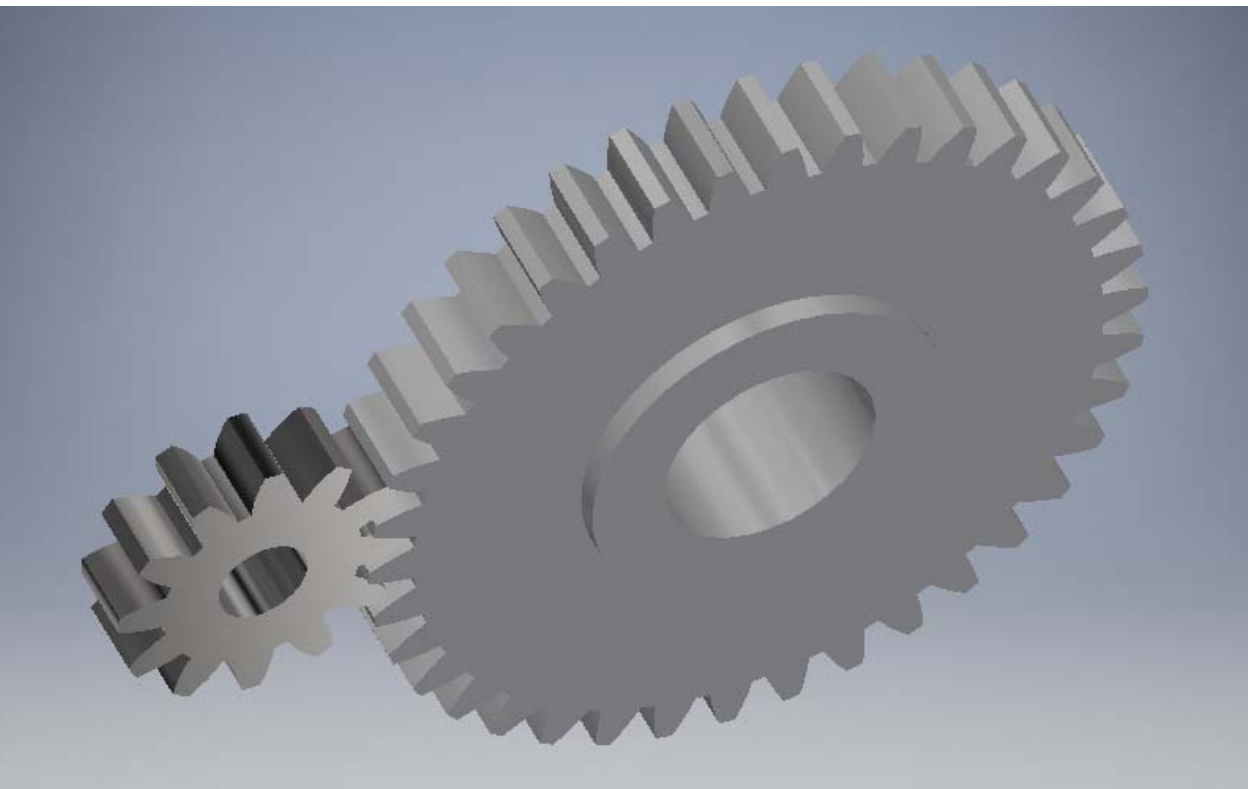
S (średnie – przeciążenia do 50%),

C (ciężkie – przeciążenia do 100%),

Lp	P	$n_1$	$n_2$	warunki pracy	t
	kW	obr/min	obr/min		godz/dobę
1.	2,2	2855	1500	L	20
2.	2,2	1425	800	S	16
3.	2,2	960	400	C	8
4.	2,2	710	250	L	20
5.	3,0	2905	1500	S	16
6.	3,0	1415	800	C	8
7.	3,0	950	400	L	20
8.	3,0	710	250	S	16
9.	4,0	2865	1500	C	8
10.	4,0	1435	800	L	20
11.	4,0	950	400	S	16
12.	4,0	705	250	C	8
13.	5,5	2910	1500	L	20
14.	5,5	1450	800	S	16
15.	5,5	950	400	C	8
16.	5,5	710	250	L	20
17.	7,5	2920	1500	S	16
18.	7,5	1450	800	C	8
19.	7,5	960	400	L	20
20.	11,0	2930	1500	S	16







# **Rozdział 9**

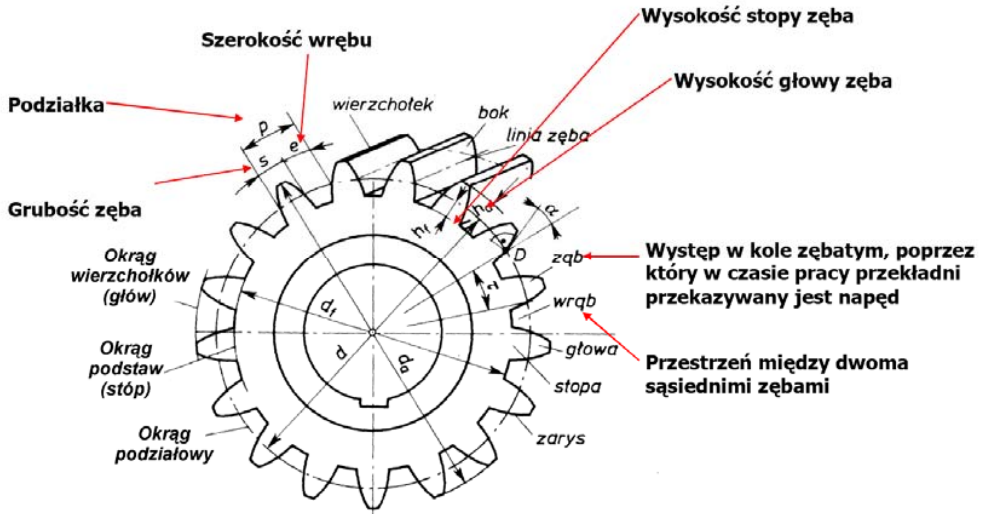
## **PRZEKŁADNIE ZĘBATE**

Opracowanie:  
dr inż. Andrzej Maciejczyk

## 9.1. KOREKCJA ZAZĘBIENIA

### 9.1.1. Koła zębate

Zależności geometryczne:



Rys. 9.1. Geometria koła zębatego

[[http://wm.pollub.pl/files/65/attachment/3123\\_wyklad,08,przekladnie,zebate,1.pdf](http://wm.pollub.pl/files/65/attachment/3123_wyklad,08,przekladnie,zebate,1.pdf)]

**Moduł nominalny (normalny) – miara wielkości zęba:**

$$m_n = \frac{p}{\pi} \quad [mm],$$

p – podziałka

Wartości modułów są znormalizowane.

**Kąt zarysu (kąt przyporu):**

$$\alpha = 20 [^\circ].$$

(wartość najczęściej spotykana).

**Wysokość głowy zęba:**

$$h_a = h_a^* \cdot m,$$

gdzie:  $h_a^*$  (lub y) – współczynnik wysokości głowy zęba – zwykle  $h_a^* = 1$ .

**Wysokość stopy zęba:**

$$h_f = (h_a^* + c^*)m,$$

gdzie:  $c^*$  – współczynnik luzu wierzchołkowego (zwykle  $c^* = 0,2-0,25$ ).

**Średnica wierzchołków:**

$$d_a = d_0 + 2h_a,$$

**Średnica stóp zębów:**

$$d_f = d_0 - 2h_f,$$

**Średnica podziałowa:**

$$d_0(d) = m * z,$$

gdzie:  $z$  – liczba zębów.

### 9.1.2. Parametry przekładni zębatych

**Zerowy rozstaw osi:**

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{z_1 + z_2}{2} m.$$

**Rzeczywisty rozstaw osi:**

$$a_w = \frac{d_{w1} + d_{w2}}{2},$$

gdzie:  $d_{w1}$ ,  $d_{w2}$  – średnice toczne.

**Przełożenie przekładni:**

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}},$$

gdzie:  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  – kątowne prędkości obrotowe koła czynnego i biernego,  
 $r_1$ ,  $r_2$  – promienie kół tocznych czynnego i biernego.

**Geometria ewolwenty:**

$$\gamma = \tan \alpha - \alpha.$$

Kąt  $\gamma$  jest funkcją ewolwentową zwaną także involutą.

$$\operatorname{inv} \alpha = \tan \alpha - \alpha.$$

## Zazębienie ewolwentowe:

– wskaźnik przyporu (zazębienia):

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - (r_{b1} + r_{b2}) \tan \alpha}{P_b}$$

gdzie:  $r_{a1}$ ,  $r_{a2}$  – promienie kół wierzchołkowych czynnego i biernego,  
 $r_{b1}$ ,  $r_{b2}$  – promienie okręgów zasadniczych czynnego i biernego,  
 $P_b$  – podziałka zasadnicza.

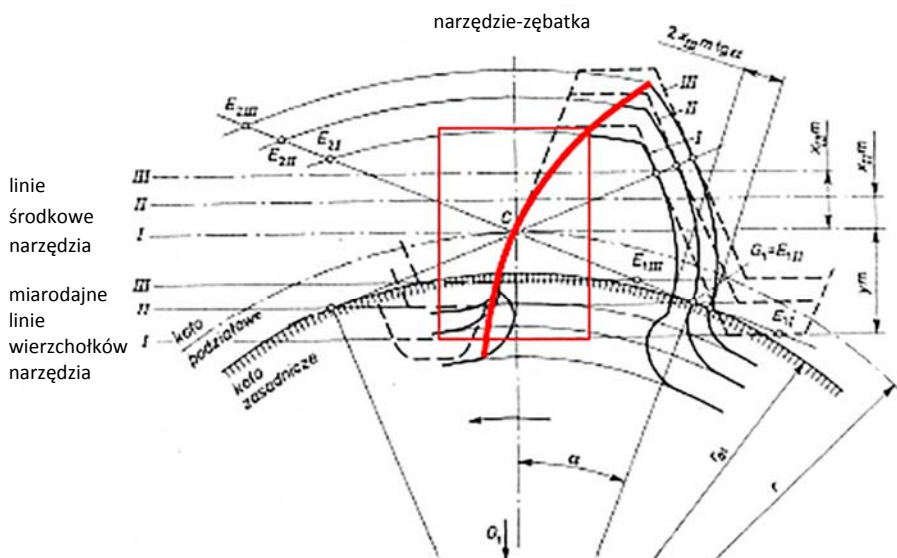
– rzeczywisty rozstaw osi:

$$a_w \cos \alpha_w = a \cos \alpha,$$

gdzie:  $\alpha_w$  – rzeczywisty (toczny) kąt zarysu.

### 9.1.3. Korekcja uzębienia

Korekcję uzębienia stosuje się przede wszystkim w celu uniknięcia podcinania stóp zębów. Zjawisko to występuje w przypadku nacinania zbyt małej liczby zębów na małym kole przekładni. W praktyce oznacza to wybór innego odcinka linii zarysu zęba (evolwenty). Dokonując korekcji uzębienia należy jednak pamiętać, że podczas przesunięcia nie można dopuścić do nadmiernego zaostrenia wierzchołka zęba.



Rys. 9.2. Podcinanie stopy zęba, korekcja – wykorzystanie innego fragmentu ewolwenty

[[http://wm.pollub.pl/files/65/attachment/3124\\_wyklad,09,przekladnie,zebate,2.pdf](http://wm.pollub.pl/files/65/attachment/3124_wyklad,09,przekladnie,zebate,2.pdf)]

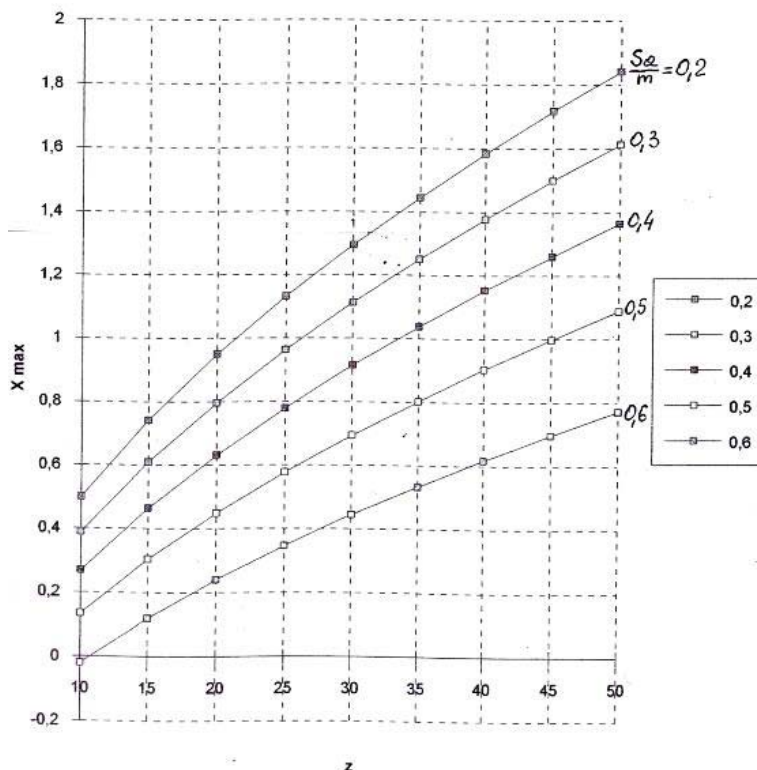
**Graniczna liczba zębów (ze względu na niepodcinanie stopy zęba):**

$$z_{gr} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha'}$$

**Graniczna wartość współczynnika korekcji (minimalny współczynnik korekcji):**

$$x_{gr} = h_a^* \frac{z_{gr} - z}{z_{gr}}$$

**Wartości maksymalne współczynników korekcji:**



Rys. 9.3. Wykres maksymalnych wartości współczynnika korekcji  $x_{max}$

Źródło: opracowanie własne.

**Szerokość zęba na kole wierzchołkowym:**

$$S_a = d_a \left( \frac{S_0}{d_0} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_a \right)$$

**Zazębienie zerowe – niekorygowane**

$$x_1 = x_2 = 0,$$

gdzie:  $x_1, x_2$  – współczynniki korekcji.

**Rozstaw osi:**

$$a_w = a = \frac{z_1 + z_2}{2} m.$$

**Zastosowanie:**

$$z_1 \geq z_{gr},$$

$$z_1 + z_2 \geq 2z_{gr}.$$

(Korekcja nie daje korzyści lub jest trudna technologicznie).

### 9.1.4. Korekcja zazębienia

Korekcja zazębienia polega na modyfikacji zarysu zębów. Zwykle jest wykonywana w celu uniknięcia podcinania zębów zębnika (małego koła). Korekcji zazębienia może towarzyszyć zmiana rozstawu osi kół zębatych.

#### Korekcja P-0

Korekcja zazębienia typu P-0 polega na tym, że po przeprowadzeniu modyfikacji zarysów zębów, nie ulega zmianie odległość osi współpracujących kół zębatych. Odległość osi jest więc równa zerowej odległości osi, jak dla kół niekorygowanych. Dla koła napędowego (zwykle małego) przeprowadza się korekcję dodatnią ( $x_1 > 0$ ), a dla koła napędzanego (zwykle większego) korekcję ujemną  $x_2 < 0$ . Wykonuje się ją w celu uniknięcia podcinania zębów małego koła ( $z_1 \leq z_{gr}$ ), o ile  $z_1 + z_2 \geq 2z_{gr}$ .

**Współczynniki korekcji:**

$$x_0 = x_1 + x_2 = 0,$$

$$x_1 = -x_2.$$

**Odległość osi:**

(pozostaje bez zmian)

$$a_w = a = \frac{z_1 + z_2}{2} m,$$

$$\alpha_w = \alpha.$$

**Wysokość głów zęba:**

$$h_a = (h_a^* + x) m,$$

**Wysokość stóp zęba:**

$$h_f = (h_a^* - x + c^*) m.$$

Całkowita wysokość zęba pozostaje bez zmian.

### Warunki stosowalności:

$$z_1 \leq z_{gr},$$
$$z_1 + z_2 \geq 2z_{gr}.$$

### Korekcja kątowna P

Zastosowanie tej korekcji powoduje, że odległość osi współpracujących kół zębatych ulegnie zmianie, w stosunku do zerowej odległości osi kół niekorygowanych. Istnieją dwie zasadnicze przyczyny konieczności zastosowanie tej korekcji:

- korekcja technologiczna – małe koło musi zostać poddane korekcji z uwagi na podcinanie zębów oraz współpracujące koła zębate mają małą liczbę zębów  $z_1 + z_2 < 2z_{gr}$ , co wyklucza wykonanie korekcji P-0.
- względy konstrukcyjne wymagają zmiany odległości osi.

### Korekcja kątowna dodatnia

#### Współczynniki korekcji:

$$x_0 = x_1 + x_2 > 0,$$
$$x_1 \neq -x_2.$$

zwykle  $x_1 > 0$

oraz

$$x_0 = \frac{z_1 + z_2}{2 \tan \alpha} (\operatorname{inv} \alpha_w - \operatorname{inv} \alpha),$$

bo

$$\operatorname{inv} \alpha_w - \operatorname{inv} \alpha = \frac{2(x_1 + x_2) \tan \alpha}{z_1 + z_2}.$$

#### Rozstaw osi:

$$a_0 > a_w,$$

ale

$$a_w \cos \alpha_w = a \cos \alpha.$$

#### Współczynnik rozstawu osi:

$$x_a = \frac{a_w - a}{m_n}$$

#### Współczynnik przesunięcia wstecznego:

$$\Delta x = x_0 - x_a.$$

#### Wysokość głowy zęba:

$$h_a = (h_a^* + x - \Delta x) m.$$

**Wysokość stopy zęba:**

$$h_f = (h_a^* - x + c^*) m.$$

**Względna grubość wierzchołka zęba koła korygowanego:**

$$\frac{s_a}{m} = \frac{d_a}{d} \left[ \frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha - z(\operatorname{inv} \alpha_a - \operatorname{inv} \alpha) \right].$$

**Warunek stosowalności:**

$$z_1 \leq z_{gr},$$

$$z_1 + z_2 < 2z_{gr}.$$

**Korekcja kątowa ujemna**

**Współczynniki korekcji:**

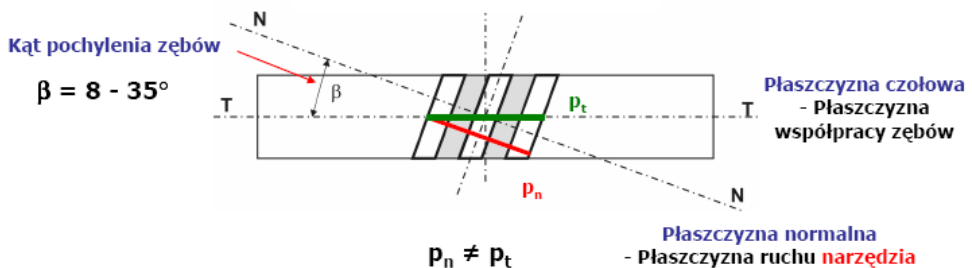
$$x_0 = x_1 + x_2 < 0,$$

$$x_1 \neq -x_2.$$

**Rozstaw osi:**

$$a_0 < a_w.$$

### 9.1.5. Koła zębate walcowe o zębach śrubowych (skośnych)



Rys. 9.4. Koło zębate walcowe o zębach śrubowych (skośnych)

[[http://wm.pollub.pl/files/65/attachment/3125\\_wyklad,10,przekladnie,zebate,3.pdf](http://wm.pollub.pl/files/65/attachment/3125_wyklad,10,przekladnie,zebate,3.pdf)]

Nacinanie uzębienia wykonuje się tymi samymi narzędziami, jak w przypadku kół o zębach prostych.

Z tego powodu obliczeń nie prowadzi się w płaszczyźnie ruchu narzędzia (płaszczyźnie normalnej) lecz w płaszczyźnie czołowej.



## Zadanie 1

Dana jest przekładnia zębata złożona z dwóch kół zębatych o zębach prostych oraz następujących parametrach geometrycznych:

liczba zębów :  $z_1 = 12$ ,  $z_2 = 38$ ,

moduł :  $m = 5$ ,

wymagany rozstaw osi:  $a_w = 125$  [mm],

kąt zarysu linii zęba:  $\alpha = 20^\circ$ ,

współczynnik luzu wierzchołkowego  $c^* = 0,25$ ,

współczynnik wysokości zęba  $h_a^* = 1$ .

Wychodząc z warunku niepodcinania zębów obliczyć:

– współczynniki przesunięcia zarysu zębów,

– wskaźnik zazębienia.

Przyjąć wymaganą względną grubość zęba na kole wierzchołkowym  $S_a/m_n = 0,3$ .

## Rozwiązanie

1. Graniczna liczba zębów (warunek niepodcinania zębów):

$$z_{gr} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha} = 17,097$$

2. Zerowy rozstaw osi:

$$a_0 = \frac{(z_1 + z_2)}{2} * m$$
$$a_0 = \frac{(12+38)}{2} * 5 = 125$$
 [mm]
$$a_0 = a_w$$

Zerowy rozstaw osi jest równy wymaganemu rozstawowi (rozstaw osi nie uległ zmianie).

Z uwagi na powyższe należałoby wykonać korekcję P-0.

3. Sprawdzenie, czy spełnione są warunki konieczny i wykonalności dla korekcji typu P-0:

$$z_1 < z_{gr},$$

$$z_1 + z_2 \geq 2z_{gr}.$$

Należy wykonać korekcję P<sup>0</sup>.

4. Całkowity współczynnik korekcji:

$$x_0 = x_1 + x_2 = 0,$$

stąd:

$$x_1 = -x_2.$$

5. Minimalny wymagany współczynnik korekcji (ze względu na niepodcinanie zębów):

$$x_{1min} = h_a^* \frac{z_{gr} - z_1}{z_{gr}} = 1 \frac{17,097 - 12}{17,097} = 0,298,$$

$$x_{2min} = h_a^* \frac{z_{gr} - z_2}{z_{gr}} = 1 \frac{17,097 - 38}{17,097} = -1,2226.$$

6. Maksymalny współczynnik korekcji (rys. 9.1):

$$x_{1max} = 0,48,$$

$$x_{2max} = 1,33.$$

7. Uwzględniając:

$$x_{1max} \geq x_1 \geq x_{1min},$$

oraz

$$x_{2max} \geq x_2 \geq x_{2min}.$$

przyjęto współczynnik korekcji małego koła:

$$x_1 = 0,3.$$

8. Współczynnik korekcji dużego koła wynosi:

$$x_2 = -0,3.$$

9. Wysokości głów zębów:

$$h_{a1} = (h_a^* + x_1)m = (1 + 0,3)5 = 6,5 \text{ [mm]},$$

$$h_{a2} = (h_a^* + x_2)m = (1 - 0,3)5 = 3,5 \text{ [mm]}.$$

10. Wysokości stóp zębów:

$$h_{f1} = (h_a^* - x_1 + c^*)m = (1 - 0,3 + 0,25)5 = 4,75 \text{ [mm]},$$

$$h_{f2} = (h_a^* - x_2 + c^*)m = (1 + 0,3 + 0,25)5 = 7,75 \text{ [mm]}.$$

11. Średnice podziałowe:

$$d_1 = m * z_1 = 5 * 12 = 60 \text{ [mm]},$$

$$d_2 = m * z_2 = 5 * 38 = 190 \text{ [mm]}.$$

12. Średnice wierzchołków:

$$d_{a1} = d_1 + 2h_{a1} = 60 + 2 * 6,5 = 73 \text{ [mm]},$$

$$d_{a2} = d_2 + 2h_{a2} = 190 + 2 * 3,5 = 197 \text{ [mm]}.$$

13. Średnice stóp:

$$d_{f1} = d_1 - 2h_{f1} = 60 - 2 * 4,75 = 50,5 \quad [mm],$$

$$d_{f2} = d_2 - 2h_{f2} = 190 - 2 * 7,75 = 174,5 \quad [mm].$$

14. Promienie okręgów zasadniczych:

$$r_{b1} = \frac{1}{2} d_1 \cos \alpha = \frac{1}{2} 60 \cos 20 = 28,19 \quad [mm],$$

$$r_{b2} = \frac{1}{2} d_2 \cos \alpha = \frac{1}{2} 190 \cos 20 = 89,27 \quad [mm].$$

15. Podziałka zasadnicza:

$$P_b = \pi m \cos \alpha = \pi * 5 \cos 20 = 14,76066 \quad [mm].$$

16. Wskaźnik zazębienia:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - (r_{b1} + r_{b2}) \tan \alpha}{P_b},$$

$$r_{a1} = \frac{d_{a1}}{2} = \frac{73}{2} = 36,5 \quad [mm],$$

$$r_{a2} = \frac{d_{a2}}{2} = \frac{197}{2} = 98,5 \quad [mm],$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{36,5^2 - 28,19^2} + \sqrt{98,5^2 - 89,27^2} - (28,19 + 89,27) \tan 20}{14,76066} = 1,4948.$$

17. Kąt przyporu na wierzchołkach kół:

$$d_a \cos \alpha_a = d \cos \alpha,$$

$$\alpha_{a1} = \arccos \left( \frac{d_1 \cos \alpha}{d_{a1}} \right) = \arccos \left( \frac{60 \cos \alpha}{73} \right) = 39,4346 \quad [^\circ]$$

$$\alpha_{a2} = \arccos \left( \frac{d_2 \cos \alpha}{d_{a2}} \right) = \arccos \left( \frac{190 \cos \alpha}{197} \right) = 25 \quad [^\circ]$$

18. Względna grubość wierzchołka koła korygowanego:

$$\frac{s_a}{m} = \frac{d_a}{d} \left[ \frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha - z(\operatorname{inv} \alpha_a - \operatorname{inv} \alpha) \right],$$

gdzie:

$$\operatorname{inv} \alpha = \tan \alpha - \frac{\alpha \pi}{180} = \tan 20 - \frac{20 \pi}{180} = 0,01490,$$

$$\operatorname{inv} \alpha_{a1} = \tan \alpha_{a1} - \frac{\alpha_{a1} \pi}{180} = \tan 39,4346 - \frac{39,4346 \pi}{180} = 0,1342,$$

$$\operatorname{inv} \alpha_{a2} = \tan \alpha_{a2} - \frac{\alpha_{a2} \pi}{180} = \tan 25 - \frac{25 \pi}{180} = 0,029975.$$

stąd:

$$\frac{s_{a1}}{m} = \frac{d_{a1}}{d} \left[ \frac{\pi}{2} + 2x_1 \tan \alpha - z_1(\operatorname{inv} \alpha_{a1} - \operatorname{inv} \alpha) \right],$$

$$\frac{S_{a1}}{m} = \frac{73}{60} \left[ \frac{\pi}{2} + 2 * 0,3 \tan \alpha 20 - 12(0,1342 - 0,01490) \right] = 0,435 \geq \left( \frac{S_a}{m} \right)_{wym} = 0,3$$

oraz

$$\frac{S_{a2}}{m} = \frac{d_{a2}}{d} \left[ \frac{\pi}{2} + 2x_2 \tan \alpha - z_2(inv \alpha_{a2} - inv \alpha) \right],$$

$$\frac{S_{a2}}{m} = \frac{197}{190} \left[ \frac{\pi}{2} - 2 * 0,3 \tan \alpha 20 - 38(0,029975 - 0,01490) \right] = 0,8083 \geq \left( \frac{S_a}{m} \right)_{wym} = 0,3.$$

## Zadanie 2

Wyznaczyć współczynniki przesunięcia  $x_1$  i  $x_2$  oraz wskaźnik zazębienia po przesunięciu zarysu dla przekładni o następujących danych:

liczba zębów :  $z_1 = 21$ ,  $z_2 = 48$ ,

moduł :  $m_n = 5$ ,

wymagany rozstaw osi:  $a_w = 100$  [mm],

kąt zarysu linii zęba:  $\alpha = 20^\circ$ ,

współczynnik luzu wierzchołkowego  $c^* = 0,25$ ,

współczynnik wysokości zęba  $h_a^* = 1$ ,

wymagana względna grubość zęba na kole wierzchołkowym  $S_a/m_n = 0,3$ .

Wykazać jaką korzyść uzyskano wskutek wykonania przesunięcia zarysu.

### Rozwiązanie:

1. Graniczna liczba zębów (warunek niepodcinania zębów):

$$z_{gr} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha} = 17,097.$$

Liczba zębów małego koła wynosi 21 – nie nastąpi podcinanie stopy zęba.

2. Zerowy rozstaw osi:

$$a_0 = \frac{(z_1 + z_2)}{2} * m,$$

$$a_0 = \frac{(21 + 48)}{2} * 5 = 103,5 \text{ [mm]},$$

$$a_0 > a_w.$$

Zerowy rozstaw osi jest większy od wymaganego.

Rozstaw osi został zmniejszony – należy wykonać korekcję kątową ujemną (z przyczyn konstrukcyjnych).

3. Całkowity współczynnik korekcji:

$$x_0 = x_1 + x_2 < 0,$$

$$x_1 \neq -x_2.$$

(zwykle wartość współczynnika  $x_1$  przyjmuje się  $> 0$ ).

$$x_0 = \frac{z_1 + z_2}{2 \tan \alpha} (\operatorname{inv} \alpha_w - \operatorname{inv} \alpha)$$

4. Tocznym kątem przyporu:

$$a_w \cos \alpha_w = a \cos \alpha,$$

$$\alpha_w = \arccos \left( \frac{a \cos \alpha}{a_w} \right) = \arccos \left( \frac{103,5 \cos 20}{100} \right) = 13,44788 [^\circ].$$

5. Funkcja ewolwentowa:

$$\operatorname{inv} \alpha = \tan \alpha - \frac{\alpha \pi}{180} = \tan 20 - \frac{20 \pi}{180} = 0,01490,$$

$$\operatorname{inv} \alpha_w = \tan \alpha_w - \frac{\alpha_w \pi}{180} = \tan 13,44788 - \frac{13,44788 \pi}{180} = 0,0044.$$

6. Całkowity współczynnik korekcji:

$$x_0 = \frac{z_1 + z_2}{2 \tan \alpha} (\operatorname{inv} \alpha_w - \operatorname{inv} \alpha) = \frac{21 + 48}{2 \tan 20} (0,0044 - 0,0149) = -0,995.$$

7. Współczynnik rozstawu osi:

$$x_a = \frac{a_w - a}{m_n} = \frac{100 - 103,5}{3} = -1,1667.$$

8. Współczynnik przesunięcia wstecznego:

$$\Delta x = x_0 - x_a = -0,995 - (-1,1667) = 0,1717.$$

9. Wymagany minimalny współczynnik korekcji:

$$x_{1min} = h_a^* \frac{z_{gr} - z_1}{z_{gr}} = 1 \frac{17,097 - 21}{17,097} = -0,22828,$$

$$x_{2min} = h_a^* \frac{z_{gr} - z_2}{z_{gr}} = 1 \frac{17,097 - 48}{17,097} = -1,8075.$$

10. Maksymalny współczynnik korekcji (z wykresu na rys. 9.1):

$$x_{1max} = 0,82,$$

$$x_{2max} = 1,58.$$

11. Uwzględniając warunki:

$$x_{1max} \geq x_1 \geq x_{1min},$$

oraz

$$x_{2max} \geq x_2 \geq x_{2min}.$$

przyjęto współczynnik korekcji małego koła:

$$x_1 = 0.$$

Współczynnik korekcji dużego koła wynosi:

$$x_2 = x_0 - x_1 = -0,995 - 0 = -0,995.$$

12. Wysokość głów zębów:

$$h_{a1} = (h_a^* + x_1 - \Delta x)m = (1 + 0 - 0,1717)3 = 2,4849 \text{ [mm]}.$$

$$h_{a2} = (h_a^* + x_2 - \Delta x)m = (1 - 0,995 - 0,1717)3 = -0,5 \text{ [mm]}.$$

13. Wysokości stóp zębów:

$$h_{f1} = (h_a^* - x_1 + c^*)m = (1 - 0 + 0,25)3 = 3,75 \text{ [mm]}.$$

$$h_{f2} = (h_a^* - x_2 + c^*)m = (1 + 0,995 + 0,25)3 = 6,735 \text{ [mm]}.$$

14. Średnice podziałowe:

$$d_1 = m_n * z_1 = 3 * 21 = 63 \text{ [mm]}.$$

$$d_2 = m_n * z_2 = 3 * 48 = 144 \text{ [mm]}.$$

15. Średnice wierzchołków:

$$d_{a1} = d_1 + 2h_{a1} = 63 + 2 * 2,4849 = 67,97 \text{ [mm]},$$

$$d_{a2} = d_2 + 2h_{a2} = 144 - 2 * 0,5 = 143 \text{ [mm]}.$$

16. Średnice stóp:

$$d_{f1} = d_1 - 2h_{f1} = 63 - 2 * 3,75 = 55,5 \text{ [mm]},$$

$$d_{f2} = d_2 - 2h_{f2} = 144 - 2 * 6,735 = 130,53 \text{ [mm]}.$$

17. Promienie okręgów zasadniczych:

$$r_{b1} = \frac{1}{2}d_1 \cos \alpha = \frac{1}{2}63 \cos 20 = 29,6 \text{ [mm]},$$

$$r_{b2} = \frac{1}{2}d_2 \cos \alpha = \frac{1}{2}144 \cos 20 = 67,66 \text{ [mm]}.$$

18. Podziałka zasadnicza:

$$P_b = \pi m \cos \alpha = \pi * 3 \cos 20 = 8,856 \text{ [mm]}.$$

19. Promienie głów zębów:

$$r_{a1} = \frac{d_{a1}}{2} = \frac{67,97}{2} = 33,985 \text{ [mm]},$$

$$r_{a2} = \frac{d_{a2}}{2} = \frac{143}{2} = 71,5 \text{ [mm]}.$$

20. Wskaźnik zazębienia:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - (r_{b1} + r_{b2}) \tan \alpha_w}{P_b},$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{33,985^2 - 29,6^2} + \sqrt{71,5^2 - 67,66^2} - (29,6 + 67,66) \tan 13,44788}{8,856} = 1,869.$$

21. Kąt przyporu na okręgach wierzchołków:

$$\alpha_{a1} = \arccos \left( \frac{d_1 \cos \alpha}{d_{a1}} \right) = \arccos \left( \frac{63 \cos 20}{67,97} \right) = 29,42 [^\circ],$$

$$\alpha_{a2} = \arccos \left( \frac{d_2 \cos \alpha}{d_{a2}} \right) = \arccos \left( \frac{144 \cos 20}{143} \right) = 18,868 [^\circ].$$

22. Względna grubość zęba:

$$\frac{S_a}{m_n} = \frac{d_a}{d} \left[ \frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha - z(\operatorname{inv} \alpha_a - \operatorname{inv} \alpha) \right],$$

$$\operatorname{inv} \alpha_{a1} = \tan \alpha_{a1} - \frac{\alpha_{a1} \pi}{180} = \tan 29,42 - \frac{29,42 \pi}{180} = 0,05,$$

$$\operatorname{inv} \alpha_{a2} = \tan \alpha_{a2} - \frac{\alpha_{a2} \pi}{180} = \tan 18,868 - \frac{18,868 \pi}{180} = 0,021244,$$

$$\frac{S_{a1}}{m} = \frac{d_{a1}}{d} \left[ \frac{\pi}{2} + 2x_1 \tan \alpha - z_1(\operatorname{inv} \alpha_{a1} - \operatorname{inv} \alpha) \right],$$

$$\frac{S_{a1}}{m} = \frac{67,97}{63} \left[ \frac{\pi}{2} + 2 * 0 * \tan \alpha 20 - 21(0,05 - 0,01490) \right] = 0,899 \geq \left( \frac{S_a}{m} \right)_{wym} = 0,3,$$

$$\frac{S_{a2}}{m} = \frac{d_{a2}}{d} \left[ \frac{\pi}{2} + 2x_2 \tan \alpha - z_2(\operatorname{inv} \alpha_{a2} - \operatorname{inv} \alpha) \right],$$

$$\frac{S_{a2}}{m} = \frac{143}{144} \left[ \frac{\pi}{2} - 2 * 0,995 \tan \alpha 20 - 48(0,021244 - 0,01490) \right] = 0,9578 \geq \left( \frac{S_a}{m} \right)_{wym} = 0,3.$$

## Przekładnia niekorygowana

1. Wysokości głów zębów:

$$h_{a1} = h_a^* m = 1 * 3 = 3 \text{ [mm]},$$

$$h_{a2} = h_a^* m = 1 * 3 = 3 \text{ [mm]}.$$

2. Średnice podziałowe:

$$d_1 = m_n * z_1 = 3 * 21 = 63 \text{ [mm]},$$

$$d_2 = m_n * z_2 = 3 * 48 = 144 \text{ [mm]}.$$

3. Średnice wierzchołków:

$$d_{a1} = d_1 + 2h_{a1} = 63 + 2 * 3 = 69 \text{ [mm]},$$

$$d_{a2} = d_2 + 2h_{a2} = 144 + 2 * 3 = 150 \text{ [mm]}.$$

4. Promienie wierzchołków:

$$r_{a1} = \frac{d_{a1}}{2} = \frac{69}{2} = 34,5 \text{ [mm]},$$

$$r_{a2} = \frac{d_{a2}}{2} = \frac{150}{2} = 75 \text{ [mm]}.$$

5. Promienie okręgów zasadniczych:

$$r_{b1} = \frac{1}{2} d_1 \cos \alpha = \frac{1}{2} 63 \cos 20 = 29,6 \text{ [mm]},$$

$$r_{b2} = \frac{1}{2} d_2 \cos \alpha = \frac{1}{2} 144 \cos 20 = 67,66 \text{ [mm]}.$$

6. Wskaźnik zazębienia:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - (r_{b1} + r_{b2}) \tan \alpha}{P_b},$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{34,5^2 - 29,6^2} + \sqrt{75^2 - 67,66^2} - (29,6 + 67,66) \tan 20}{8,856} = 1,65787.$$

### Wniosek:

Wskutek wykonania korekcji  $P^*$  nastąpił wzrost stopnia pokrycia przekładni.

## Zadania do samodzielnego rozwiązania

### Zadanie 1

Dla przekładni o następujących parametrach:

liczba zębów:  $z_1 = 14$ ,  $z_2 = 40$ ,

moduł:  $m = 3$ ,

wymagany rozstaw osi:  $a_w = 81 \text{ mm}$ ,

kąt zarysu linii zęba:  $\alpha = 20^\circ$ ,

współczynnik luzu wierzchołkowego  $c^* = 0,25$ ,

współczynnik wysokości zęba  $h_a^* = 1$ ,

wymagana względna grubość zęba na kole wierzchołkowym  $S_a/m_n = 0,3$ ,

wyznaczyć współczynniki przesunięcia zarysu zębów oraz wskaźnik zazębienia.

Podcinanie stopy zęba oraz zaostrenie wierzchołka niedopuszczalne.

### Zadanie 2

Dla przekładni o następujących parametrach:

liczba zębów:  $z_1 = 12$ ,  $z_2 = 19$ ,

moduł:  $m = 4$ ,

wymagany rozstaw osi:  $a_w = 63 \text{ [mm]}$ ,

kąt zarysu linii zęba:  $\alpha = 20^\circ$ ,



współczynnik luzu wierzchołkowego  $c^* = 0,25$ ,  
współczynnik wysokości zęba  $h_a^* = 1$ ,  
wymagana względna grubość zęba na kole wierzchołkowym  $S_a/m_n = 0,3$ ,  
wyznaczyć współczynniki przesunięcia zarysu zębów oraz wskaźnik zazębienia.

### Zadanie 3

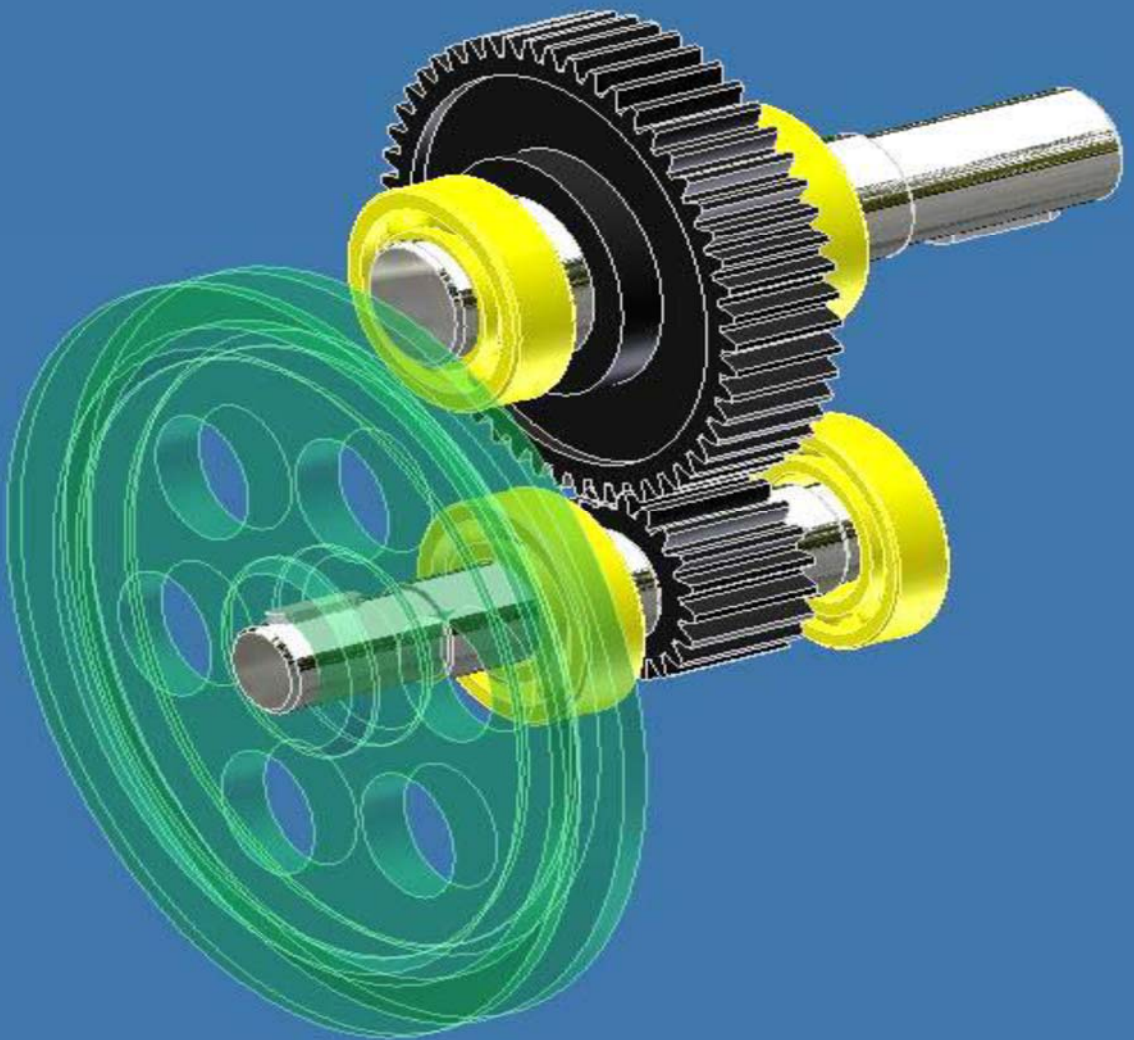
Wyznaczyć współczynniki przesunięcia  $x_1$  i  $x_2$  oraz wskaźnik zazębienia po przesunięciu zarysu dla przekładni o następujących danych:

liczba zębów:  $z_1 = 11$ ,  $z_2 = 28$ ,  
moduł:  $m_n = 2,5$ ,  
wymagany rozstaw osi:  $a_w = 50 [m]$ ,  
kąt zarysu linii zęba:  $\alpha_n = 20^\circ$ ,  
kąt pochylenia linii zęba:  $\beta = 8^\circ 30'$   
współczynnik luzu wierzchołkowego  $c^* = 0,25$ ,  
współczynnik wysokości zęba  $h_a^* = 1$ ,  
szerokość wieńca  $b_w = 25 \text{ mm}$ ,

Przyjąć względną grubość zęba na kole wierzchołkowym  $S_a/m_n = 0,25$ .

**Uwaga:** Przekładnia o zębach śrubowych. Obliczenia należy prowadzić w płaszczyźnie czołowej.

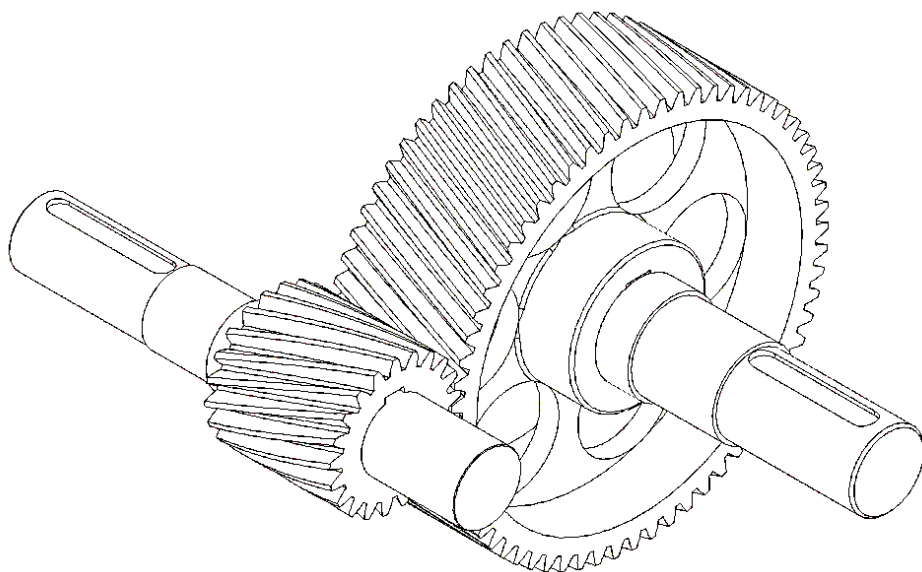




## 9.2. Przekładnie zębate o zębach skośnych

Opracowanie:  
dr inż. Maciej Kuchar

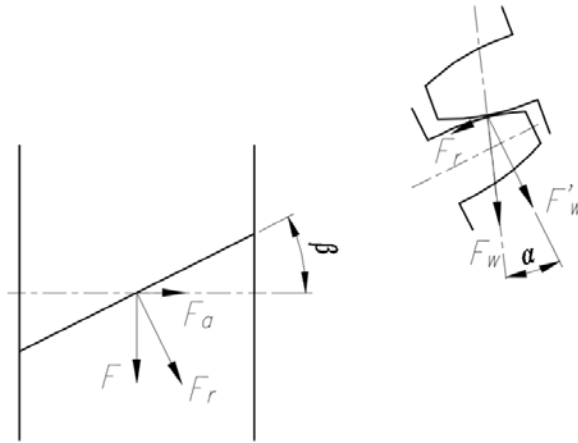
Rysunek 9.5 przedstawia przekładnię zębatą walcową o zębach skośnych. Prawy kierunek pochylenia linii zębów wyznacza linia śrubowa powodująca obrót koła zgodnie ze wskazówkami zegara przy jednoczesnym przesuwie koła do przodu. Na rysunku koło duże jest więc kołem prawym a koło małe jest lewym. Zawsze bowiem koło lewe musi współpracować z kołem prawym. Podstawową zaletą przekładni skośnej jest zwiększenie liczby jednocześnie współpracujących ze sobą zębów, wadą – generowanie dodatkowej składowej siły międzyzębnej działającej w kierunku osi koła.



Rys. 9.5. Przekładnia zębata o zębach skośnych

*Źródło: opracowanie własne.*

Siłę międzyzębną  $F_w$  można rozłożyć na trzy składowe: obwodową, promieniową i osiową. Składowa obwodowa  $F$  działa w kierunku stycznym do średnicy tocznej koła zębatego (na ogół jest to średnica podziałowa) i jest odpowiedzialna za przeniesienie momentu obrotowego. Składowa promieniowa  $F_r$  obciąża wał w kierunku poprzecznym i wynika z kąta zarysu (kąta przyporu)  $\alpha$ . Zwrot składowej promieniowej jest zawsze skierowany do osi koła. Składowa osiowa  $F_a$  działa w kierunku zgodnym z osią koła i wynika z kąta pochylenia linii zębów  $\beta$ .



Rys. 9.6. Składowe siły międzyzębnej  
*Źródło: opracowanie własne.*

Składową obwodową opisuje zależność:

$$F = 2 \frac{M}{d_p} = 2 \frac{P}{\omega d_p} = \frac{60}{\pi} \frac{P}{n d_p},$$

gdzie:  $P$  – moc przekładni,  
 $M$  – moment obrotowy,  
 $n$  – prędkość obrotowa,  
 $d_p$  – średnica podziałowa koła zębatego.

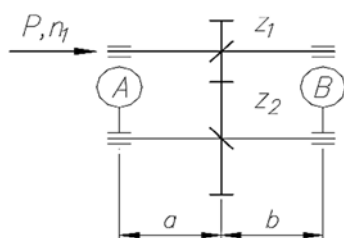
Biorąc pod uwagę przedstawioną na rysunku 10.2 geometrię zazębienia składowe: promieniową i osiową opisuje zależność:

$$F_r = F' \operatorname{tg} \alpha = F \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta},$$

$$F_a = F \operatorname{tg} \beta.$$

### Zadanie 1

Dla przekładni zębatej (przedstawionej na schemacie) o parametrach: moc  $P = 7300$  [W], obroty wałka wejściowego  $n_1 = 1450$  [obr./min], moduł normalny  $m_n = 4$  [mm], liczby zębów  $z_1 = 19$ ,  $z_2 = 53$ , kąt przyporu w przekroju normalnym  $\alpha = 20$  [°], kąt pochylenia linii zębów  $\beta = 19$  [°], odległości  $a = 60$  [mm],  $b = 80$  [mm], policzyć siłę międzyzębną oraz reakcje w łożyskach wału wyjściowego. Koło wejściowe jest lewe.

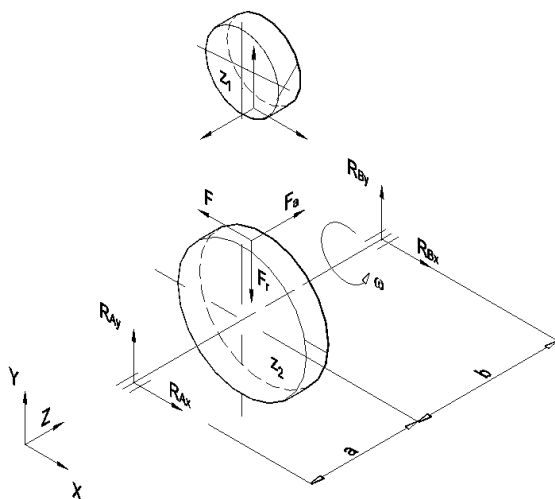


Rys. 9.7. Schemat przekładni zębatej. Zadanie 1  
Źródło: opracowanie własne.

## Rozwiązanie:

1. Kierunki działania składowych siły międzyzębnej.

Szkic przekładni pokazano na rysunku poniżej. Jeśli założyć kierunek dodatni (zegarowy) prędkości obrotowej wałka wejściowego (napędowego) to wałek wyjściowy (napędzany) będzie się obracał w kierunku ujemnym (trygonometrycznym). Przyłożony moment obrotowy obciąża wał wejściowy w kierunku zgodnym z prędkością obrotową. Składowa obwodowa siły międzyzębnej odbiera/równoważy go. Działa więc na koło zębate ze zwrotem który wywołuje na wale przeciwnie skierowany moment obrotowy. Składowa obwodowa  $F$  napędza z kolei drugie koło zębate. Wywołuje na wale wyjściowym moment obrotowy zgodny z jego prędkością obrotową. Składowa promieniowa  $F_r$  siły międzyzębnej jest zawsze zwrócona w stronę osi koła zębatego. Zwrot składowej osiowej siły międzyzębnej  $F_a$  wynika z działania na nachylone zęby składowej obwodowej jak na równię pochyłą.



Rys. 9.8. Schemat obciążeń przekładni zębatej. Zadanie 1  
Źródło: opracowanie własne.

2. Średnice podziałowe kół zębatach:

$$d_{p1} = \frac{z_1 m_n}{\cos \beta} = \frac{19 \cdot 4}{\cos 19^\circ} = 80,4 \text{ mm}, \quad d_{p2} = \frac{z_2 m_n}{\cos \beta} = \frac{56 \cdot 4}{\cos 19^\circ} = 224,2 \text{ mm}.$$

3. Składowe: obwodowa, promieniowa i osiowa siły międzyzębnej:

$$F = \frac{60}{\pi} \frac{P}{nd_p} = \frac{60}{\pi} \frac{7300}{1450 \cdot 80,4} \cdot 1000 = 1196 \text{ N},$$

$$F_r = F \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} = 1196 \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\cos 19^\circ} = 460 \text{ N},$$

$$F_a = F \operatorname{tg} \beta = 1196 \cdot \operatorname{tg} 19^\circ = 412 \text{ N}.$$

4. Składowe reakcji na podporach wynikają z równań momentów:

$$\sum y_B = -Fb - R_{Ax}(a+b) = 0,$$

$$R_{Ax} = \frac{-Fb}{a+b} = \frac{-1196 \cdot 80}{60+80} = -684 \text{ N},$$

$$\sum x_B = -F_r b + F_a \frac{d_{p2}}{2} + R_{Ay}(a+b) = 0,$$

$$R_{Ay} = \frac{F_r b - F_a \frac{d_{p2}}{2}}{a+b} = \frac{1196 \cdot 80 - 412 \frac{224,2}{2}}{60+80} = -67 \text{ N},$$

$$\sum y_A = -Fa + R_{Bx}(a+b) = 0,$$

$$R_{Bx} = \frac{-Fa}{a+b} = \frac{-1196 \cdot 80}{60+80} = -513 \text{ N},$$

$$\sum x_A = -F_r a + F_a \frac{d_2}{2} - R_{By}(a+b) = 0,$$

$$R_{By} = \frac{F_r a + F_a \frac{d_2}{2}}{a+b} = \frac{1196 \cdot 60 - 412 \frac{224,2}{2}}{60+80} = 527 \text{ N}.$$

5. Ostatecznie reakcje poprzeczne na podporach wału:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 687 \text{ N},$$

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} = 735 \text{ N},$$

6. Reakcja w kierunku osi z działa jest równa co do wartości składowej  $F_a$  ze zwrotem przeciwnym. Celem kontroli poprawności wyliczonych składowych reakcji na podporach należy złożyć sumę wszystkich sił w kierunku osi  $x$  i  $y$  i  $z$ :

$$\sum F_x = R_{Ax} + R_{Bx} + F = 0,$$

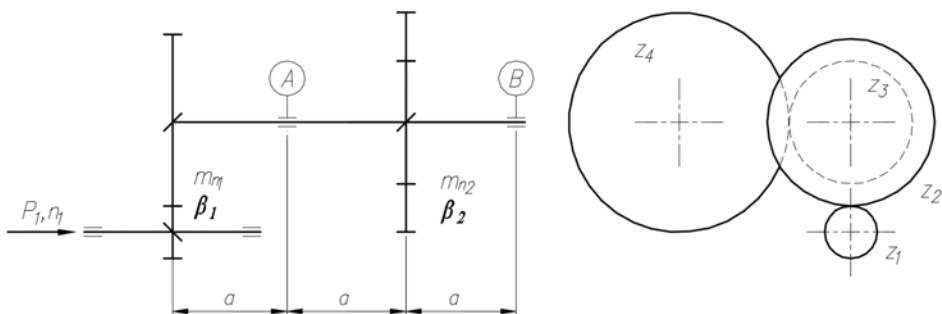
$$\sum F_y = R_{Ay} + R_{By} - F_r = 0,$$

$$\sum F_z = R_a - R_z = 0.$$

## Zadanie 2

Dla przekładni zębatej dwustopniowej o parametrach: moc  $P = 17000 \text{ [W]}$ , obroty wałka wejściowego  $n_1 = -1470 \text{ [obr./min]}$ , moduły normalne obu stopni:  $m_{n1} = 6 \text{ [mm]}$ ,  $m_{n2} = 8 \text{ [mm]}$ , liczby zębów kół:  $z_1 = 15$ ,  $z_2 = 39$ ,  $z_3 = 17$ ,  $z_4 = 31$  kąt przyporu w przekroju normalnym  $\alpha = 20 \text{ [°]}$ , kąty pochylenia linii zębów obu stopni:  $\beta_1 = 15 \text{ [°]}$ ,  $\beta_2 = 9 \text{ [°]}$  odległości  $a = 100 \text{ [mm]}$ , policzyć składowe siły międzyzębnej oraz reakcje w łożyskach wału pośredniego. Koła na wale pośrednim mają uzębienie nacięte w kierunku lewym.

## Rozwiązanie:

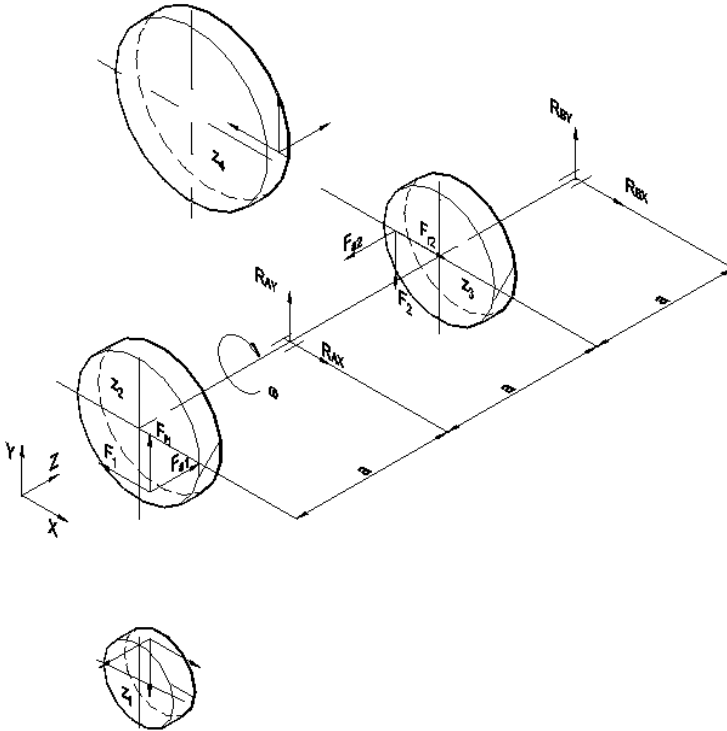


Rys. 9.9. Schemat przekładni zębatej. Zadanie 2

Źródło: opracowanie własne.



1. Prędkość obrotowa wału wejściowego jest w kierunku ujemnym/trYGONOMETRYCZNYM. Dlatego prędkość kątowna wału pośredniego jest w kierunku dodatnim/zegarowym. Biorąc pod uwagę przedstawione w zadaniu 1 rozważania, kierunki i zwroty składowych sił międzyzębnych przedstawiono na szkicu przekładni zębatej zamieszczonym poniżej.



Rys. 9.10. Schemat obciążeń przekładni zębatej. Zadanie 2

Źródło: opracowanie własne.

2. Średnica podziałowa koła zębatego na wale wejściowym:

$$d_{p1} = \frac{z_1 m_{n1}}{\cos \beta_1} = \frac{15 \cdot 6}{\cos 15^\circ} = 93,2 \text{ mm}.$$

3. Średnice podziałowe kół zębatych na wale pośrednim:

$$d_{p2} = \frac{z_2 m_{n1}}{\cos \beta_1} = \frac{39 \cdot 6}{\cos 15^\circ} = 242,3 \text{ mm}, \quad d_{p3} = \frac{z_3 m_{n2}}{\cos \beta_2} = \frac{17 \cdot 8}{\cos 9^\circ} = 137,7 \text{ mm}.$$

4. Składowe siły międzyzębnej na stopniu pierwszym:

$$F_1 = \frac{60}{\pi} \frac{P}{n_1 d_{p1}} = \frac{60}{\pi} \frac{17000}{1450 \cdot 93,2} \cdot 1000 = 2370 \text{ N},$$

$$F_{r1} = F_1 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta_1} = 2370 \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\cos 15^\circ} = 893 \text{ N},$$

$$F_{a1} = F_1 \operatorname{tg} \beta_1 = 2370 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = 635 \text{ N}.$$

5. Składowe siły międzyzębnej na stopniu drugim:

$$F_2 = F_1 \frac{d_{p2}}{d_{p3}} = 2370 \frac{242,3}{137,7} = 4170 \text{ N},$$

$$F_{r2} = F_2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta_2} = 4170 \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\cos 9^\circ} = 1537 \text{ N},$$

$$F_{a2} = F_2 \operatorname{tg} \beta_2 = 4170 \cdot \operatorname{tg} 9^\circ = 661 \text{ N}.$$

6. Składowe reakcji poprzecznych na podporach wału pośredniego:

$$R_{Ax} = \frac{1}{2a} (F_1 3a - F_{r2} a - F_{a2} \frac{d_{p3}}{2}) = \frac{1}{2 \cdot 100} (4170 \cdot 3 \cdot 100 - 1537 \cdot 100 - 661 \cdot \frac{137,7}{2}) = 2560 \text{ N},$$

$$R_{Ay} = \frac{1}{2a} (-F_{r1} 3a + F_{a1} \frac{d_{p2}}{2} + F_2 a) = \frac{1}{2 \cdot 100} (-893 \cdot 3 \cdot 100 + 635 \cdot \frac{242,3}{2} + 4170 \cdot 100) = 1130 \text{ N},$$

$$R_{Bx} = \frac{1}{2a} (-F_1 a - F_{r2} a + F_{a2} \frac{d_{p3}}{2}) = \frac{1}{2 \cdot 100} (-2370 \cdot 100 - 1537 \cdot 100 + 661 \cdot \frac{137,7}{2}) = 1726 \text{ N},$$

$$R_{By} = \frac{1}{2a} (F_{r1} a - F_{a1} \frac{d_{p2}}{2} + F_2 a) = \frac{1}{2 \cdot 100} (893 \cdot 100 - 635 \cdot \frac{242,3}{2} + 4170 \cdot 100) = 2147 \text{ N}.$$

7. Ostatecznie reakcje poprzeczne na podporach wału pośredniego:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{2560^2 + 1130^2} = 2798 \text{ N},$$

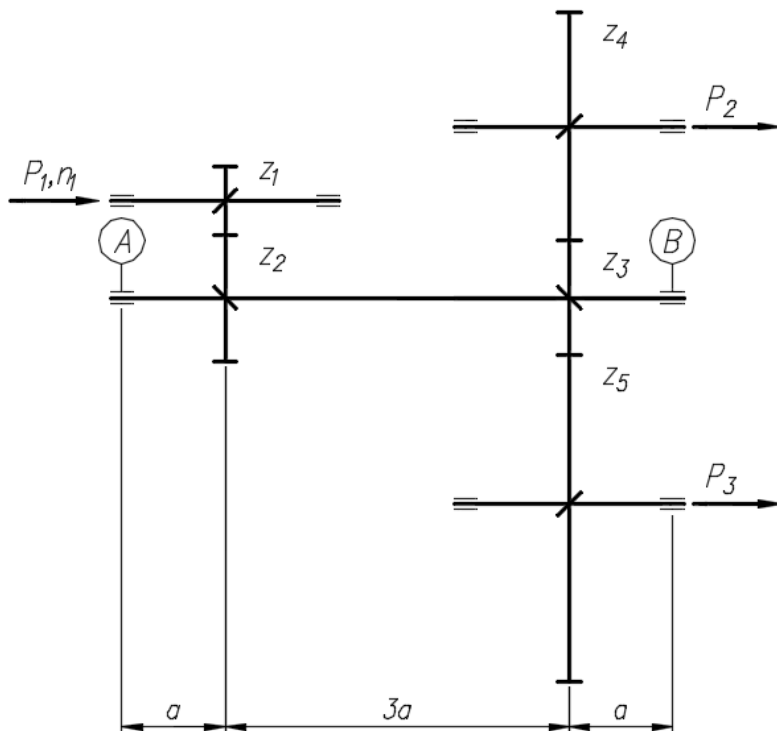
$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} = \sqrt{1726^2 + 2147^2} = 2755 \text{ N}.$$

8. Reakcja wzdłużna na wał pośredni:

$$R_z = F_{a1} - F_{a2} = 635 - 661 = -25 \text{ N}.$$

### Zadanie 3

Dla przekładni zębatej dwustopniowej z rozdziałem mocy, o parametrach: moc  $P = 15000 \text{ W}$ , obroty wałka wejściowego  $n_1 = 1450 \text{ obr./min}$ , moduły normalne obu stopni:  $m_{n1} = 5 \text{ mm}$ ,  $m_{n2} = 6 \text{ mm}$ , liczby zębów kół:  $z_1 = 14$ ,  $z_2 = 25$ ,  $z_3 = 19$ ,  $z_4 = 45$ ,  $z_5 = 35$  kąt przyporu w przekroju normalnym  $\alpha = 20^\circ$ , kąty pochyleń linii zębów obu stopni:  $\beta_1 = 12^\circ$ ,  $\beta_2 = 10^\circ$  odległości  $a = 100 \text{ mm}$ , policzyć składowe siły międzyzębnej oraz reakcje w łożyskach wału pośredniego. Rozdział mocy należy założyć w proporcjach:  $P_3 = 2P_2$ . Koła na wale pośrednim mają uzębienie nacięte w kierunku prawym.

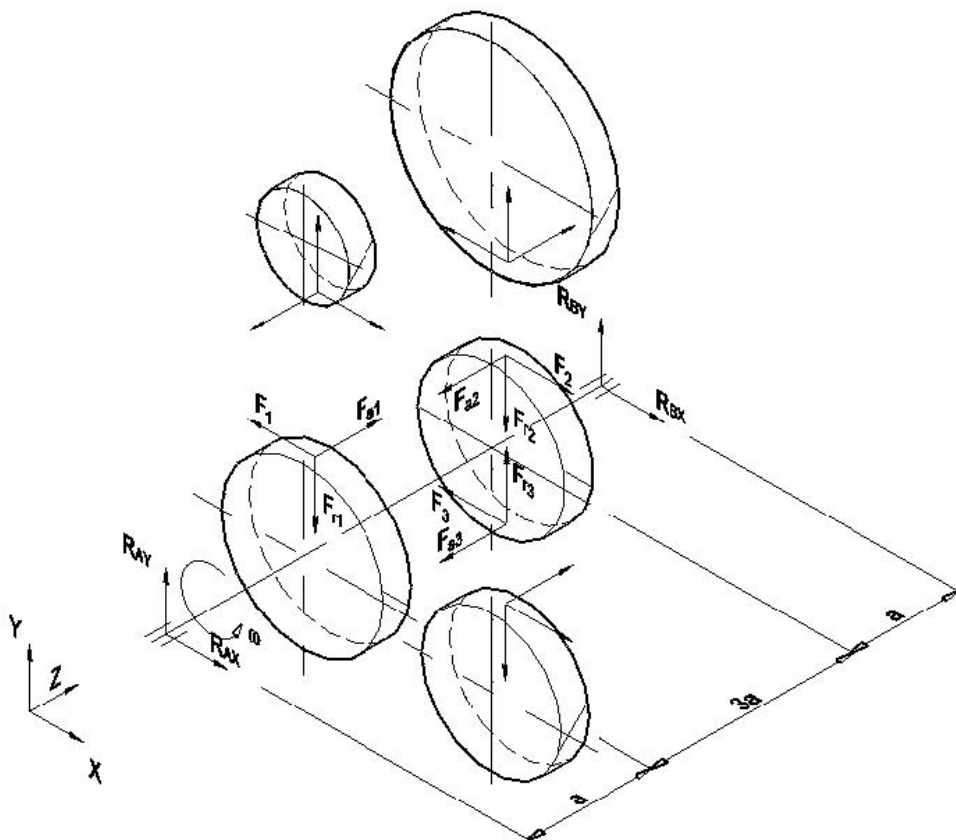


Rys. 9.11. Schemat przekładni. Zadanie 6

Źródło: opracowanie własne.

### Rozwiązanie:

1. Kierunki składowych sił międzyzębnych przedstawiono na szkicu:



Rys. 9.12. Schemat obciążeń przekładni. Zadanie 3

Źródło: opracowanie własne.

2. Średnica podziałowa koła zębatego na wale wejściowym:

$$d_{p1} = \frac{z_1 m_{n1}}{\cos \beta_1} = \frac{14 \cdot 5}{\cos 12^\circ} = 71,6 \text{ mm}.$$

3. Średnice podziałowe kół zębatych na wale pośrednim:

$$d_{p2} = \frac{z_2 m_{n1}}{\cos \beta_1} = \frac{25 \cdot 5}{\cos 12^\circ} = 127,8 \text{ mm}, \quad d_{p3} = \frac{z_3 m_{n2}}{\cos \beta_2} = \frac{19 \cdot 6}{\cos 10^\circ} = 115,8 \text{ mm}.$$

4. Prędkość kątowna wału wejściowego:

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{\pi \cdot 1450}{30} = 151,8 \frac{1}{s}.$$

5. Prędkość kątowna wału pośredniego:

$$\omega_2 = \frac{z_1}{z_2} \cdot \omega_1 = \frac{14}{25} \cdot 151,8 = 85,0 \frac{1}{s}$$

6. Składowe siły międzyzębnej na stopniu pierwszym:

$$F_1 = \frac{2 \cdot P}{\omega_1 d_{p1}} = \frac{2 \cdot 15000}{151,8 \cdot 71,6} \cdot 1000 = 2761 \text{ N},$$

$$F_{r1} = F_1 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta_1} = 2761 \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\cos 12^\circ} = 1027 \text{ N},$$

$$F_{a1} = F_1 \operatorname{tg} \beta_1 = 2761 \cdot \operatorname{tg} 12^\circ = 587 \text{ N}.$$

7. Rozdział mocy na stopniu drugim i trzecim.

Ponieważ:  $P_1 = P_2 + P_3 = 3 \cdot P_2$ , z czego wynika, że:

$$P_2 = \frac{1}{3} P_1, \quad P_3 = \frac{2}{3} P_1.$$

8. Składowe siły międzyzębnej na stopniu drugim i trzecim:

$$F_2 = \frac{\frac{2}{3} \cdot P_1}{\omega_2 \cdot d_{p3}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 15000}{85,0 \cdot 115,8} \cdot 1000 = 1016 \text{ N},$$

$$F_{r2} = F_2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta_2} = 1016 \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\cos 10^\circ} = 375 \text{ N},$$

$$F_{a2} = F_2 \operatorname{tg} \beta_2 = 1016 \cdot \operatorname{tg} 10^\circ = 179 \text{ N},$$

$$F_3 = \frac{\frac{4}{3} \cdot P_1}{\omega_2 \cdot d_{p3}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 15000}{85,0 \cdot 115,8} \cdot 1000 = 2032 \text{ N},$$

$$F_{r3} = F_3 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta_2} = 2032 \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\cos 10^\circ} = 751 \text{ N},$$

$$F_{a3} = F_3 \operatorname{tg} \beta_2 = 2032 \cdot \operatorname{tg} 10^\circ = 358 \text{ N}.$$

9. Składowe reakcji poprzecznych na podporach wału pośredniego:

$$R_{Ax} = \frac{-1}{5a}(-F_1 4a + F_2 a - F_3 a) = \frac{1}{5 \cdot 100}(2761 \cdot 4 \cdot 100 - 1016 \cdot 100 + 2032 \cdot 100) = 2412 \text{ N},$$

$$R_{Ay} = \frac{-1}{5a}(-F_{r1} 4a + F_{a1} \frac{d_{p2}}{2} - F_{r2} a + F_{r3} a - F_{a2} \frac{d_{p3}}{2} + F_{a3} \frac{d_{p3}}{2}) =$$

$$\frac{1}{5 \cdot 100}(-1027 \cdot 4 \cdot 100 + 587 \cdot \frac{127,8}{2} - 375 \cdot 100 + 751 \cdot 100 - 179 \cdot \frac{115,8}{2} + 358 \cdot \frac{115,8}{2}) = 651 \text{ N},$$

$$R_{Bx} = \frac{1}{5a}(-F_1 a - F_2 4a + F_3 4a) = \frac{1}{5 \cdot 100}(-2761 \cdot 100 - 1016 \cdot 4 \cdot 100 + 2032 \cdot 4 \cdot 100) = 1365 \text{ N},$$

$$R_{By} = \frac{1}{2a}(F_{r1} a - F_{a1} \frac{d_{p2}}{2} + F_2 a) = \frac{1}{2 \cdot 100}(893 \cdot 100 - 635 \cdot \frac{242,3}{2} + 4170 \cdot 100) = 2147 \text{ N}.$$

$$R_{By} = \frac{1}{5a}(F_{r1} a - F_{a1} \frac{d_{p2}}{2} + F_{r2} 4a - F_{r3} 4a - F_{a2} \frac{d_{p3}}{2} + F_{a3} \frac{d_{p3}}{2}) =$$

$$\frac{1}{5 \cdot 100}(1027 \cdot 100 - 587 \cdot \frac{127,8}{2} + 375 \cdot 4 \cdot 100 - 751 \cdot 4 \cdot 100 - 179 \cdot \frac{115,8}{2} + 358 \cdot \frac{115,8}{2}) = 1 \text{ N},$$

10. Ostatecznie reakcje poprzeczne na podporach wału:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{2412^2 + 651^2} = 2498 \text{ N},$$

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} = \sqrt{1365^2 + 1^2} = 1365 \text{ N}.$$

11. Reakcja wzdłużna na wał pośredni:

$$R_z = F_{a1} - F_{a2} - F_{a3} = 587 - 179 - 358 = 49 \text{ N}.$$

## Zadania do samodzielnego rozwiązania

### Zadanie 1

Dla przekładni jednostopniowej obliczyć reakcje poprzeczne podpór wałka wyjściowego.

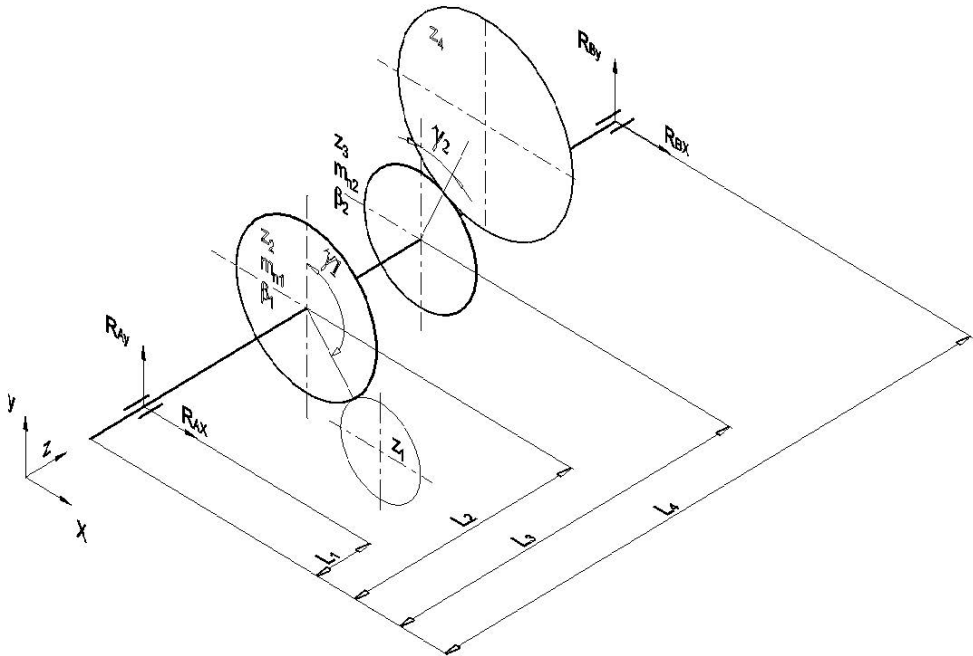
Dane do zadań i rozwiązania

	$P$ $kW$	$N$ $obr./min$	$z_1$	$z_2$	$m_n$ $mm$	$\alpha^\circ$	$\beta^\circ$	$a$ $mm$	$b$ $mm$	$R_A$ $N$	$R_B$ $N$
1	9	950	21	65 <sub>(P)</sub>	5	20	16	100	120	904	995
2	9	1450	23 <sub>(L)</sub>	62	4	20	16	80	100	688	719
3	11	1450	23 <sub>(L)</sub>	67	4,5	20	16	80	100	748	834

4	11	2950	21	63(L)	3	20	19	80	50	603	658
5	11	2950	21(L)	63	3	20	23	60	90	627	625
6	13	2950	21(L)	63	3,5	20	23	80	115	622	621
7	13,5	1450	19(L)	63	6	20	17	100	140	871	872
8	13,5	1450	19	63(L)	6	20	17	120	80	903	902
9	10,5	1450	19(P)	63	5	20	18	120	85	818	812
10	10,5	970	17(P)	59	6,5	20	18	130	100	1088	1059
11	10,5	950	17	59(P)	6,5	20	15	90	120	1035	1078
12	7,3	950	19(L)	59	4	20	17	90	120	1058	1013
13	6,8	770	19(L)	59	4,5	20	19	100	130	1054	1074
14	6,8	770	19(P)	59	4,5	20	17	120	90	1062	1078
15	8,2	1450	15(P)	57	3,5	20	17	110	90	1099	1086

## Zadanie 2

Dla przekładni dwustopniowej przedstawionej na szkicu obliczyć reakcje podpór wałka pośredniego.



Rys. 9.13. Schemat obciążeń przekładni.

Zadania do samodzielnego rozwiązania. Zadanie 2

Źródło: opracowanie własne.

### Dane do zadań:

	$P$ <i>kW</i>	$n$ <i>obr./min</i>	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$\beta_1^\circ$	$\beta_2^\circ$	$m_{n1}$ <i>mm</i>	$m_{n2}$ <i>mm</i>	$L_1$ <i>mm</i>	$L_2$ <i>mm</i>	$L_3$ <i>mm</i>	$L_4$ <i>mm</i>	$\gamma_1^\circ$	$\gamma_2^\circ$
1	15	2950	17 <sub>(L)</sub>	33	19	31	18	12	5	6	0	80	280	400	180	0
2	15	2950	17 <sub>(L)</sub>	33	19	31	18	12	5	6	0	80	270	400	180	270
3	7,5	950	13	37 <sub>(P)</sub>	15	31	17	8	5	6	0	80	280	440	180	0
4	12	1450	16 <sub>(L)</sub>	35	15	37	19	10	5	6	0	120	360	480	180	0
5	17	-1470	13	39 <sub>(P)</sub>	17	33	17	9	6	8	120	0	200	360	180	270
6	20	-1450	15	39 <sub>(P)</sub>	17	31	17	10	6	8	120	0	210	380	270	0
7	15	-1450	17	39 <sub>(P)</sub>	15	31	19	10	6	8	100	0	200	400	270	0
8	7,5	950	17	39 <sub>(L)</sub>	15	31	15	11	4	5	100	0	200	380	180	90
9	6,3	950	15	39 <sub>(L)</sub>	13	31	19	8	4	5	0	100	170	300	180	270
10	7,3	1450	17 <sub>(P)</sub>	37	13	31	19	9	3	4	0	80	165	280	180	0
11	8,0	1450	17	39 <sub>(L)</sub>	14	31	19	9	3	4	0	90	180	300	180	270
12	7,5	750	17	37 <sub>(L)</sub>	13	31	21	9	5	6	0	80	220	360	0	180
13	9,3	960	15	33 <sub>(P)</sub>	13	31	22	10	5	6	0	100	230	380	0	180
14	8,9	960	15	33 <sub>(P)</sub>	13	31	19	9	5	6	0	90	220	380	0	90
15	11,3	1450	17 <sub>(L)</sub>	39	15	31	19	9	4	54	0	100	190	340	0	90

### Rozwiązania

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$R_A$	1355	1362	3536	2347	3337	3378	2095	2552	3533	2907	3058	3684	3735	3611	3285
$R_B$	1366	1377	3486	3374	3338	3388	2111	2548	3415	2977	3087	3911	3761	3566	3263



## Literatura

- [1] Osiński Z., Bajon W., Szucki T., Podstawy konstrukcji maszyn, PWN, W-wa 1986.
- [2] Branowski B., Sprężyny metalowe, PWN, W-wa 1997.
- [3] Kurmaz L.W., Kurmaz O.L., Projektowanie węzłów i części maszyn, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce 2003.
- [4] Korewa W., Zygmunt K., Podstawy Konstrukcji Maszyn, PWN, T 1/2; W-wa 1973.
- [5] Dietrich M. i inni: Podstawy Konstrukcji Maszyn, T 1-3, WNT, W-wa 1999.
- [6] Kocańda S., Szala J., Podstawy obliczeń zmęczeniowych, PWN, W-wa 1991.
- [7] Krzemiński-Treda H., Łożyska toczne, PWN, W-wa 1989.
- [8] Muller L., Przekładnie zębate – projektowanie, WNT, W-wa 1979.
- [9] Kaczan B., Obliczenia przekładni z pasami klinowymi – materiały pomocnicze do przedmiotu PKM, PŁ.
- [10] Starego W., Przekładnie pasowe ogólnego przeznaczenia z pasami klinowymi produkcji Sanok Rubber Company S.A. stosowane w budowie maszyn i urządzeń. Poradnik konstruktora, wyd. piąte poprawione 2017.
- [11] Łożyska toczne, Katalog SKF, 2014.
- [12] Krukowski A., Tutaj A., Połączenia odkształceniowe, PWN, seria wydawnicza „PKM”.
- [13] Niezgodziński M.E., Niezgodziński T., Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe. WNT, W-wa 1996.
- [14] Mazanek E., Przykłady obliczeń z podstaw konstrukcji maszyn, tom 1/2, WNT, W-wa 2012.

## Wykaz norm

1. PN-ISO 2162-2: 1996 / Ap1: 1999 – Rysunek Techniczny Maszynowy. Sprężyny. Przedstawianie danych dla sprężyn śrubowych naciskowych i walcowych.
2. PN-ISO 2162-2: 1996 - Parametry projektowe sprężyny.
3. PN-ISO 2162: 1996 / Ap1: 1999 – Rysowanie i wymiarowanie sprężyn.
4. PN-EN 13906-1:2003\_ – Sprężyny śrubowe walcowe z drutów lub prętów okrągłych – Sprężyny naciskowe -- Obliczanie i konstrukcja.
5. PN -ISO 724: 1995 – Gwinty metryczne ISO ogólnego przeznaczenia. Wymiary nominalne.
6. PN-EN ISO 898-1: 2001 Własności mechaniczne części złącznych wykonanych ze stali węglowej i stopowej. Śruby i śruby dwustronne.
7. PN-EN ISO 898-5: 2001 Własności mechaniczne części złącznych wykonanych ze stali węglowej i stopowej. Śruby bez łba i podobne gwintowane części złączne niepodlegające rozciąganiu.
8. PN-EN 28839: 1999 - Własności mechaniczne części złącznych. Śruby, śruby dwustronne i nakrętki wykonane z metali nieżelaznych.
9. PN-EN 20225: 1994 ISO 225 Części złączne. Śruby, wkręty i nakrętki. Wymiarowanie.
10. PN-EN 20273: 1998 Części złączne. Otwory przejściowe dla śrub i wkrętów.
11. PN EN 20286-1:1996 ISO 286-1 Układ tolerancji i pasowań ISO. Podstawy tolerancji, odchyłek i pasowań.
12. PN EN 20286-2:1996 ISO 286-2 Układ tolerancji i pasowań ISO. Tablice klas tolerancji normalnych oraz odchyłek granicznych otworów i wałków.
13. PN EN 22768-1:1999 Tolerancje ogólne. Tolerancje wymiarów liniowych i kątowych bez indywidualnych oznaczeń tolerancji.
14. PN EN 22768-2:1999 Tolerancje ogólne. Tolerancje geometryczne elementów bez indywidualnych oznaczeń tolerancji.
15. ISO 773, Wpusty pryzmatyczne zaokrąglone.
16. ISO 2491, Wpusty pryzmatyczne i odpowiadające im rowki.
17. PN-ISO 14:1994, Połączenia wielowypustowe równoległe walcowe osiowane na średnicy wewnętrznej -- Wymiary, tolerancje i sprawdzanie.
18. PN-ISO 4156:1999, Połączenia wielowypustowe ewolwentowe walcowe osiowane na bokach zębów -- Wymiary, tolerancje i sprawdzanie..
19. PN-M-85000:1998, Czopy końcowe wałów. Główne wymiary i dopuszczalne momenty obrotowe.
20. PN-66/M-85202, Koła rowkowe do pasków klinowych. Wymiary wieńców kół.
21. PN-67/M-85203, Przekładnie pasowe z pasami klinowymi. Zasady obliczania.
22. PN-84/M-85211, Koła pasowe.
23. ISO 5290, Wymiary wieńców kół pasowych.
24. PN-86/M-85200/06, Pasy klinowe. Pasy normalnoprofilowe. Wymiary.
25. PN-ISO 1081:2001, Napędy pasowe -- Pasy klinowe i wieloklinowe oraz odpowiednie koła pasowe rowkowe – Terminologia.

26. PN-ISO 4184:2000, Pasy klinowe klasyczne.
27. PN-ISO 54:2001, Przekładnie zębate walcowe ogólnego przeznaczenia oraz dla przemysłu ciężkiego –Moduły.
28. PN-ISO 1122-1:2004, Przekładnie zębate. Przekładnie walcowe. Terminologia i oznaczenia.
29. PN-EN 10025:2002, Własności wytrzymałościowe stali niestopowych konstrukcyjnych walcowanych na gorąco.
30. PN-EN 10083-2+A1: 1999, Własności mechaniczne stali niestopowych do ulepszania cieplnego.
31. PN-EN 10083-1+A1:1999, Własności wytrzymałościowe stali stopowych do ulepszenia cieplnego w stanie obrobionym cieplnie.
32. PN-EN 10084: 1999, Własności wytrzymałościowe wybranych gatunków stali stopowych konstrukcyjnych do nawęglania w stanie obrobionym cieplnie.
33. PN-EN 1561: 2000, Własności wytrzymałościowe żeliw szarych.
34. PN-EN 1563: 2000, Własności wytrzymałościowe żeliw sferoidalnych dla grubości ścianki odlewu do 30 mm.
35. PN-EN 1982: 2002, Własności wytrzymałościowe mosiądźów i brązów odlewniczych.
36. PN-EN 1302: 2004, Specyfikacje geometrii wyrobów (GPS) - Oznaczanie struktury geometrycznej powierzchni w dokumentacji technicznej wyrobu.

## Wykaz rysunków

Rys. 1.1.	Sprężyna walcowa naciskowa.....	8
Rys. 1.2.	Wartości współczynnika $x$ dla sprężyn: a) zwijanych na zimno, b) na gorąco [wg PN-EN 13906-1:2003 – Sprężyny śrubowe walcowe z drutów lub prętów okrągłych -- Sprężyny naciskowe -- Obliczanie i konstrukcja] .....	11
Rys. 1.3.	Charakterystyka sprężyny do Zadania 1 .....	13
Rys. 1.4.	Graficzne potwierdzenie poprawności dokonanych obliczeń dla Zadania 2 ..	19
Rys. 1.5.	Schemat obciążenia sprężyny do Zadania 3.....	19
Rys. 1.6.	Graficzne potwierdzenie poprawności dokonanych obliczeń dla Zadania 3 ..	22
Rys. 1.7.	Wykres pracy sprężyny dla Zadania 3 .....	22
Rys. 1.8.	Zadania do samodzielnego rozwiązania. Sprężyny. Schemat do Zadania 1 ..	23
Rys. 2.1.	Przykłady połączeń gwintowych .....	26
Rys. 2.2.	Schemat rozkładu obciążeń w śrubie .....	26
Rys. 2.3.	Wykres pracy złącza śrubowego.....	28
Rys. 2.4.	Schemat obciążenia wspornika dla Zadania 1.....	31
Rys. 2.5.	Szkic obciążeń poszczególnych śrub wspornika dla Zadania 1 .....	33
Rys. 2.6.	Wykres pracy złącza śrubowego dla Zadania 1 .....	34
Rys. 2.7.	Schemat obciążenia wspornika dla Zadania 2.....	36
Rys. 2.8.	Schemat obciążeń poszczególnych śrub wspornika dla Zadania 2 .....	38
Rys. 2.9.	Wykres pracy złącza śrubowego dla Zadania 2 .....	39
Rys. 2.10.	Schemat obciążeń wspornika. Zadania do samodzielnego rozwiązania. Zadanie 1 .....	41
Rys. 2.11.	Schemat obciążeń wspornika. Zadania do samodzielnego rozwiązania. Zadanie 2 .....	42
Rys. 3.1.	Przykład spoiny czołowej .....	44
Rys. 3.2.	Schemat zniszczenia spoiny pachwinowej.....	44
Rys. 3.3.	Schemat do wyznaczania obliczeniowej długości spoiny .....	45
Rys. 3.4.	Schemat obciążeń pospawanego wspornika dla Zadania 1 .....	45
Rys. 3.5.	Naprężenia w spoinach dla Zadania 1.....	48
Rys. 3.6.	Schemat obciążenia przyspawanego wspornika dla Zadania 2 .....	50
Rys. 3.7.	Położenie środka ciężkości spoiny.....	51
Rys. 3.8.	Rozkład naprężeń w pkt. B spoiny.....	52
Rys. 3.9.	Szkic obciążeń spoiny. Zadania do samodzielnego rozwiązania. Zadanie 1 ..	54
Rys. 3.10.	Szkic obciążeń spoiny. Zadania do samodzielnego rozwiązania. Zadanie 2 ..	55
Rys. 4.1.	Wcisk max. i min. złącza .....	61
Rys. 4.2.	Schemat połączenia ciernego do Zadania 1 .....	64
Rys. 4.3.	Schemat połączenia ciernego do Zadania 2 .....	68
Rys. 5.1.	Schemat obciążenia.....	76
Rys. 5.2.	Obliczeniowa długość wpustu .....	76
Rys. 5.3.	Schemat obciążenia.....	78

Rys. 6.1. Schemat obciążenia wału napędowego.....	82
Rys. 6.2. Schemat obciążenia wału dla zadania 1 .....	85
Rys. 6.3. Schemat obciążenia wału siłami poprzecznymi w płaszczyźnie x-y. Zadanie 1 .....	86
Rys. 6.4. Schemat obciążenia wału siłami poprzecznymi w płaszczyźnie x-z. Zadanie 1 .....	87
Rys. 6.5. Schemat do wyznaczania momentów gnących wału w płaszczyźnie x-y. Zadanie 1 .....	88
Rys. 6.6. Wykres momentów gnących wału w płaszczyźnie x-y. Zadanie 1 .....	89
Rys. 6.7. Schemat do wyznaczania momentów gnących wału w płaszczyźnie x-z. Zadanie 1 .....	89
Rys. 6.8. Wykres momentów gnących wału w płaszczyźnie x-z. Zadanie 1 .....	90
Rys. 6.9. Wykres wypadkowych momentów gnących wału. Zadanie 1 .....	91
Rys. 6.10. Wykres momentu skręcającego. Zadanie 1 .....	91
Rys. 6.11. Wykres momentu zredukowanego. Zadanie 1 .....	92
Rys. 6.12. Schemat obciążenia wału. Zadanie 2 .....	93
Rys. 6.13. Schemat do wyznaczenia obciążeń w płaszczyźnie y-x. Zadanie 2 .....	93
Rys. 6.14. Schemat do wyznaczenia obciążeń w płaszczyźnie z-x. Zadanie 2 .....	94
Rys. 6.15. Szkic do wyznaczenia momentów gnących w płaszczyźnie y-x. Zadanie 2 ..	95
Rys. 6.16. Wykres momentów gnących w płaszczyźnie y-x. Zadanie 2 .....	96
Rys. 6.17. Szkic do wyznaczenia momentów gnących w płaszczyźnie z-x. Zadanie 2 ..	96
Rys. 6.18. Wykres momentów gnących w płaszczyźnie z-x. Zadanie 2 .....	97
Rys. 6.19. Wykres wypadkowych momentów gnących. Zadanie 2 .....	98
Rys. 6.20. Wykres momentu skręcającego. Zadanie 2 .....	98
Rys. 6.21. Wykres momentu zredukowanego. Zadanie 2 .....	99
Rys. 6.22. Schemat obciążenia wału. Zadanie do samodzielnego rozwiązania .....	100
Rys. 7.1. Wykres wartości $e$ i $Y$ dla łożysk kulkowych z luzem normalnym. ....	103
Rys. 7.2. Szkic obciążeń wału. Zadanie 1 .....	106
Rys. 7.3. Schemat obciążeń łożyskowania wału. Zadanie 1 .....	107
Rys. 7.4. Szkic obciążeń wału. Zadanie 2 .....	108
Rys. 7.5. Schemat obciążeń łożyskowania wału. Zadanie 2 .....	109
Rys. 7.6. Schemat obciążeń łożyskowanego wału. Zadanie do samodzielnego rozwiązania .....	111
Rys. 8.1. Schemat przekładni pasowej .....	114
Rys. 8.2. Wykresy wstępnego doboru wielkości przekroju pasów klinowych (wg [10]) .....	115
Rys. 8.3. Schemat obciążenia koła napędowego przekładni paskowej .....	125
Rys. 9.1. Geometria koła zębatego .....	130
Rys. 9.2. Podcinanie stopy zęba, korekcja – wykorzystanie innego fragmentu ewolwenty .....	132

Rys. 9.3. Wykres maksymalnych wartości współczynnika korekcji $x_{\max}$ .....	133
Rys. 9.4. Koło zębate walcowe o zębach śrubowych (skośnych) .....	136
Rys. 9.5. Przekładnia zębata o zębach skośnych.....	148
Rys. 9.6. Składowe siły międzyzębnej.....	149
Rys. 9.7. Schemat przekładni zębatej. Zadanie 1 .....	150
Rys. 9.8. Schemat obciążeń przekładni zębatej. Zadanie 1 .....	150
Rys. 9.9. Schemat przekładni zębatej. Zadanie 2.....	152
Rys. 9.10. Schemat obciążeń przekładni zębatej. Zadanie 2.....	153
Rys. 9.11. Schemat przekładni. Zadanie 3 .....	155
Rys. 9.12. Schemat obciążeń przekładni. Zadanie 3 .....	156
Rys. 9.13. Schemat obciążeń przekładni. Zadania do samodzielnego rozwiązania. Zadanie 2 .....	159

## Wykaz tablic

Tabela 1.1. Oznaczenia wykonania zakończeń sprężyny [wg PN-ISO 2162-2: 1996 / Ap1: 1999 – zakończenia sprężyn walcowych] .....	10
Tabela 1.2. Wartości współczynnika $x$ [wg PN-EN 13906-1:2003 – Sprężyny śrubowe walcowe z drutów lub prętów okrągłych -- Sprężyny naciskowe -- Obliczanie i konstrukcja].....	11
Tabela 1.3. Orientacyjne własności wytrzymałościowe niektórych gatunków stali sprężynowych .....	12
Tabela 2.2. Klasy własności oraz materiały stosowane na śruby [wg PN-EN 28839:1999] .....	30
Tabela 4.1. Wartości współczynników tarcia [wg 4].....	61
Tabela 4.2. Charakterystyczne cechy różnych materiałów [wg 4] .....	62
Tabela 4.4. Otworów i wałków (w $\mu\text{m}$ ) [wg PN EN 20286-1:1996 ISO 286-1 Układ tolerancji i pasowań ISO. Tolerancje Podstawy tolerancji, odchyłek i pasowań; PN EN 20286-2:1996 ISO 286-2 Układ tolerancji i pasowań ISO. Tablice klas tolerancji normalnych oraz odchyłek granicznych otworów i wałków].....	62
Tabela 4.5. Własności żeliw [wg PN-EN 1561:2000].....	63
Tabela 4.6. Oznaczanie struktury geometrycznej powierzchni [wg PN-EN ISO 1302:2004].....	73
Tabela 5.1. Dopuszczalne naciski dla połączeń wpustowych [4] .....	75
Tabela 5.2. Dopuszczalne naciski dla połączeń wielowypustowych [4] .....	78
Tabela 7.1. Wartości współczynnika $s_0$ [wg 11].....	102
Tabela 7.2. Wartości $e$ oraz $X$ i $Y$ dla różnych rodzajów łożysk [wg 8] .....	103
Tabela 7.3. Wartości współczynnika niezawodności $a_1$ [wg 11] .....	104
Tabela 7.4. Wartości współczynnika temperaturowego [wg 11].....	105
Tabela 7.5. Wartości współczynnika obciążenia dynamicznego [wg <a href="http://www.pkm.edu.pl/index.php/lozyska/dobor/383-03010113">http://www.pkm.edu.pl/index.php/lozyska/dobor/383-03010113</a> ] .....	105
Tabela 8.1. Wymiary pasów [wg PN-66/M-85201] .....	116
Tabela 8.2. Wymiary kół pasowych [wg PN-66/M-85202].....	117
Tabela 8.3a. Moc $P_1$ przenoszona przez jeden pas [9] .....	118
Tabela 8.3b. Współczynnik przełożenia $k_i$ [9].....	119
Tabela 8.3c. Współczynnik długości pasa $k_L$ [9] .....	119
Tabela 8.3d. Współczynnik kąta opasania $k_\varphi$ [9].....	119
Tabela 8.3e. Współczynnik warunków i czasu pracy $k_T$ [9].....	120